М. ПОПРУЖЕНКО.

НАЧАЛА АНАЛИЗА.

Изданіе второе.

Цѣна 1 р. 50 коп.

ИЗДАНІЕ
Т-ва „В. В. ДУМНОВЪ, наслѣдн. Бр. САЛАЕВЫХЪ“.
Въ Москвѣ, Большая Лубянка, 15/17. | Въ Петроградѣ, Большая Конюшенная, № 1.
1918.

ОБЗОРЪ ПРЕЖДЕ УСВОЕННАГО МАТЕРЬЯЛА.

Безконечно-малыя и безконечно-большія числа.

1. Перемѣнное число называется безконечно-малымъ, если, при нѣкоторомъ опредѣленномъ процессѣ измѣненія этого числа, абсолютная величина его можетъ сдѣлаться и затѣмъ остаться меньше всякаго напередъ заданнаго положительнаго числа.

Вотъ примѣры безконечно-малыхъ чиселъ:

а) $\frac{1}{n}$ есть число безконечно-малое, если положительное число n безгранично увеличивается. Дѣйствительно, если желаемъ, чтобы имѣло мѣсто неравенство:

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{1000000},$$

то достаточно взять:

$$n > 1000000.$$

Понятно, что, при дальнѣйшемъ возрастаніи n, дробь $\frac{1}{n}$ будетъ оставаться меньше $\frac{1}{1000000}$.

б) Разность 2—x есть безконечно-малое число, если x, оставаясь меньше 2, безгранично приближается къ 2-мъ. Дѣйствительно, если желаемъ, чтобы имѣло мѣсто неравенство:

$$2 - x < 0{,}001$$

то достаточно взять:

$$2 > x > 1{,}999$$

Понятно, что при дальнѣйшемъ возрастанiи x (причемъ x остается меньше 2) разность 2—x будетъ оставаться меньше 0,001.

c) Разность между радiусомъ R и апоѳемою a правильнаго вписаннаго въ кругъ многоугольника, при безграничномъ увеличенiи числа n его сторонъ, есть число безконечно-малое.

Дѣйствительно:

$$R - a < \text{половины стор. правильн. вп. многоуг.} < \frac{2\pi R}{2n} = \frac{\pi R}{n}.$$

Если желаемъ, чтобы:

$$R - a < \frac{1}{1000},$$

то достаточно взять:

$$n > 1000\pi R.$$

Понятно, что при дальнѣйшемъ возрастанiи n, разность $R-a$ будетъ оставаться меньше $\frac{1}{1000}$.

2. Продумаемъ еще разъ данное опредѣленiе безконечно-малаго числа и разобранные примѣры.

Изъ нихъ слѣдуетъ, что **безконечно-малое** число есть **прежде всего перемѣнное число.** Поэтому, было бы совершенно **нелѣпо** сказать, что, напримѣръ, $\frac{1}{1000000}$ есть число безконечно-малое; это нелѣпо потому, что $\frac{1}{1000000}$ есть число постоянное, а не перемѣнное.

Итакъ, безконечно-малое число есть число перемѣнное; но, конечно, не всякое перемѣнное число можетъ быть названо безконечно-малымъ, а только такое, абсол. величина котораго, при опредѣленномъ процессѣ его измѣненiя, можетъ сдѣлаться и затѣмъ остаться менѣе любого заданнаго положительнаго числа.

Слѣдовательно, если въ какомъ-нибудь вопросѣ потребуется доказать, что y есть безконечно-малое число, то необходимо будетъ установить слѣдующiя положенiя:

1) **y есть число перемѣнное;**

2) **абсолютная величина y, измѣняясь, можетъ сдѣлаться и затѣмъ остаться менѣе любого заданнаго положительнаго числа.**

Разберемъ, съ этой точки зрѣнiя, еще одинъ немного болѣе сложный примѣръ. Именно докажемъ, что при безграничномъ увеличенiи x дробь:

$$y = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$$

есть число безконечно-малое.

Дѣйствительно:

a) y есть число перемѣнное (въ зависимости отъ измѣненія x).

b) неравенство:

$$\frac{x}{x^2-5x+6} < \frac{1}{100}$$

при:

$$x > 5 \text{ *)}$$

можетъ быть замѣнено слѣдующимъ:

$$x^2-105x+6 > 0,$$

или:

$$x(x-105)+6 > 0,$$

которое будетъ удовлетворено **при всякомъ** $x \geqq 105$.

3. Безконечно-большимъ числомъ называется такое перемѣнное число, абсолютная величина котораго, при нѣкоторомъ опредѣленномъ процессѣ измѣненія этого числа, можетъ сдѣлаться и затѣмъ остаться больше всякаго даннаго положительнаго числа. Напримѣръ, сумма x членовъ ряда:

$$1+2+\ldots\ldots\ldots\ldots+x,$$

равная $\frac{x^2+x}{2}$, есть число безконечно-большое, при безграничномъ возрастаніи x, п. ч.:

a) эта сумма есть число перемѣнное;

b) это перемѣнное число можетъ сдѣлаться и остаться больше всякаго заданнаго положительнаго числа; напримѣръ, требованіе:

$$\frac{x^2+x}{2} > 1000$$

выполняется при всякомъ $x \geqq 45$.

4. Разсмотримъ теперь нѣкоторыя свойства безконечно-малыхъ чиселъ.

a) **Сумма конечнаго **) числа безконечно-малыхъ чиселъ есть число безконечно-малое.**

b) **Разность двухъ безконечно-малыхъ чиселъ есть число безконечно-малое или ноль.**

---

*) Ибо при $x \geqq 5$:

$$x^2-5x+6=(x-5)x+6 > 0.$$

**) Это заключеніе не всегда справедливо при безконечно-большомъ числѣ слагаемыхъ. Если n число цѣлое, безгранично увеличивающееся, то сумма n безконечно-малыхъ слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое равно $\frac{1}{n^2}$, равна безконечно малому числу $\frac{1}{n}$; сумма n^2 такихъ же слагаемыхъ равно 1; сумма n^3 такихъ же слагаемыхъ равна n, т.-е. числу безконечно-большому.

c) **Произведенiе безконечно-малаго числа на постоянное число есть число безконечно-малое.**

d) **Произведенiе двухъ или нѣсколькихъ б. м. чиселъ есть число безконечно-малое.**

e) **Частное отъ дѣленiя безконечно-малаго числа на постоянное число есть число безконечно-малое.**

Методъ доказательства всѣхъ этихъ теоремъ одинаковъ: всюду надо доказать, что абс. величина того результата, о которомъ говорится въ теоремѣ, можетъ сдѣлаться и затѣмъ остаться меньше всякаго даннаго положительнаго числа.

Если, напримѣръ, хотимъ доказать, что 1000α, при α безконечно-маломъ *), есть число безконечно-малое, то можемъ потребовать, чтобы имѣло мѣсто неравенство:

$$1000\,\alpha < \frac{1}{100}.$$

А это осуществимо при:

$$\alpha < \frac{1}{100000}.$$

Можетъ ли α сдѣлаться менѣе

$$\frac{1}{100000}?$$

Да, потому что α есть безконечно-малое число.

5. Произведенiе безконечно-малаго числа на конечное перемѣнное число есть число безконечно-малое.

Прежде всего замѣтимъ, что подъ **конечнымъ перемѣннымъ числомъ понимается такое перемѣнное число, абсолютная величина котораго, при опредѣленномъ процессѣ его измѣненiя, всегда остается меньше нѣкотораго постояннаго положительнаго числа.** Такъ, напримѣръ, число, измѣряющее периметръ всякаго многоугольника, вписаннаго въ данную окружность радiуса R, есть конечное перемѣнное число, потому что, при увеличенiи числа сторонъ многоугольника, оно остается менѣе 8R, числа, измѣряющаго периметръ описаннаго около окружности квадрата.

Замѣтивъ это, объяснимъ, что произведенiе безконечно-малаго положительнаго числа α на конечное положительное перемѣнное число X, меньшее 1000, есть число безконечно-малое.

Дѣйствительно требованiе:

$$X\alpha < \frac{1}{10}$$

---

*) α—считается положительнымъ числомъ. Если бы оно было отрицательно, то мы разсматривали бы его абсолютную величину.

выполняется при условіи:

$$1000\alpha < \frac{1}{10}$$

и говорить, что:

$$\alpha < \frac{1}{10000}.$$

6. Отношеніе двухъ безконечно-малыхъ чиселъ можетъ быть:

a) **конечнымъ числомъ:**

$\frac{6\alpha}{\alpha}=6$ (при α б. маломъ здѣсь и далѣе, въ §§ 6 и 7).

b) **Перемѣннымъ конечнымъ числомъ:**

$$\frac{(2x+1)\alpha}{\alpha}=2x+1.$$

(здѣсь, предполагается, что x есть конечное перемѣнное число).

c) **безконечно-малымъ числомъ:**

$$\frac{6\alpha^2}{\alpha}=6\alpha.$$

d) **безконечно-большимъ числомъ:**

$$\frac{3\alpha}{\alpha^2}=\frac{3}{\alpha}.$$

7. Такъ какъ отношенія:

$$\frac{6\alpha}{\alpha}\quad \frac{(2x+1)\alpha}{\alpha},\ \frac{6\alpha^2}{\alpha},\ \frac{3\alpha}{\alpha^2}$$

можно представить подъ видомъ произведеній:

$$\frac{1}{\alpha}\cdot 6\alpha;\ \frac{2x+1}{\alpha}\cdot\alpha;\ \frac{6}{\alpha}\cdot\alpha^2;\ \frac{3}{\alpha^2}\cdot\alpha,$$

то, на основаніи предыдущаго параграфа, заключаемъ, что **произведеніе безконечно-малаго числа на безконечно-большое** число можетъ быть **числомъ постояннымъ, конечнымъ перемѣннымъ, безконечно-малымъ и безконечно-большимъ.**

8. Если безконечно-малое число β таково, что отношеніе его къ безконечно-малому числу α есть новое безконечно-малое число ω, т.-е.:

$$\frac{\beta}{\alpha}=\omega \text{ и, слѣдовательно, } \beta=\omega\alpha,$$

то говорятъ, что **порядокъ безконечно-малаго числа** β выше порядка безконечно-малаго числа α.

Смыслъ этой фразы тотъ, что $|\beta|$ уменьшается или стремится къ 0 быстрѣе, чѣмъ $|\alpha|$, и притомъ въ такой мѣрѣ быстрѣе, что отношеніе $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$ можетъ быть какъ угодно мало.

Если, напримѣръ:

$$\beta = 6t^4$$
$$\alpha = 3t^2,$$

гдѣ t есть безконечно малое число, то:

$$\frac{\beta}{\alpha} = 2t^2 = \text{б. м. число},$$

и слѣдовательно порядокъ безконечно-малаго числа β выше порядка безконечно-малаго числа α.

Это очень важное понятіе о безконечно-малыхъ высшихъ порядковъ примѣнимъ пока къ опредѣленію знака разностей алгебраическихъ суммъ, составленныхъ изъ безконечно-малыхъ чиселъ.

Задача 1-я. Опредѣлить знакъ разности:

$$3\alpha - 1000\alpha^2,$$

гдѣ α есть пол. безконечно-малое число.

Здѣсь мы имѣемъ два безконечно-малыхъ числа (§ 4-й):

$$3\alpha \text{ и } 1000\alpha^2.$$

Порядокъ второго безконечно-малаго числа выше, чѣмъ порядокъ перваго, ибо:

$$\frac{1000\alpha^2}{3\alpha} = \frac{1000}{3}\alpha = \text{б. м. ч.};$$

поэтому, при достаточно-маломъ α, данная разность будетъ всегда положительна.

Въ этомъ можно убѣдиться еще иначе:

$$3\alpha - 1000\alpha^2 = \alpha\,(3 - 1000\alpha).$$

Слѣдовательно, данная разность будетъ положительна при всякомъ значеніи α, меньшемъ 0,003.

Задача 2-я. Опредѣлить знакъ алгебр. суммы:

$$-0{,}1\alpha + 5\alpha^2 + 100\alpha^3,$$

при условіи, что α есть полож. б. м. число.

На основаніи соображеній, изложенныхъ при рѣшеніи предыдущей задачи, заключаемъ, что, при достаточно маломъ α, данная алгебр. сумма будетъ отрицательна.

Задача 3-я. Опредѣлить знакъ разности:

$$x^3 - 1000000x,$$

при безграничномъ возрастаніи положит. числа x.

Эту задачу можно свести къ предыдущимъ, полагая $x = \frac{1}{y}$, гдѣ y пол. б. м. число. Но проще вынести x за скобки и изъ полученнаго выраженія:

$$x(x^2 - 1000000)$$

заключить, что оно положительно при $x > 1000$.

Стремленіе къ предѣлу.

9. Вспомнимъ нѣсколько фактовъ изъ алгебры и геометріи.

— Перемѣнная площадь правильнаго вписаннаго въ данный кругъ многоугольника, при безграничномъ увеличеніи числа его сторонъ, приближается къ постоянной площади круга такъ, что разность между ними можетъ быть какъ угодно мала; иначе говоря, эта разность есть число безконечно-малое.

— Перемѣнный объемъ правильной вписанной въ данный цилиндръ призмы, при безграничномъ увеличеніи числа граней призмы, безгранично приближается къ постоянному объему цилиндра такъ, что разность между этими объемами есть число безконечно-малое.

— Перемѣнная сумма членовъ безконечной убывающей прогрессіи:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots,$$

при безграничномъ увеличеніи числа ея членовъ, приближается къ числу 2 такъ, что разность между числомъ 2 и этой суммой есть число безконечно-малое.

— Разсмотримъ измѣненіе дроби: $y=\frac{x-1}{x}$

при безграничномъ увеличеніи x. Давая x значенія: 1, 2, 3, 4,.... 1000000, ..., получимъ слѣдующія значенія y:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \ldots \frac{999999}{1000000} \ldots$$

Ясно, что, по мѣрѣ возрастанія x, мы будемъ получать такія значенія y, которыя все менѣе и менѣе отличаются отъ единицы. Представивъ y подъ видомъ:

$$y=1-\frac{1}{x},$$

мы увидимъ, что разность:

$$1-y=\frac{1}{x}$$

равна безконечно-малому числу $\frac{1}{x}$.

Въ каждомъ изъ разобранныхъ примѣровъ мы имѣемъ дѣло съ двумя числами: одно изъ нихъ постоянное (площадь круга, объемъ цилиндра, 2, 1), а другое перемѣнное (площадь многоугольника, объемъ призмы, сумма членовъ прогрессіи, значеніе перемѣннаго y), и эти числа таковы, что разность между ними есть число безконечно-малое.

При такихъ условіяхъ постоянное число называется предѣломъ перемѣннаго.

Слѣдовательно:

a) предѣлъ площади правильнаго впис. въ кругъ многоугольника, при безграничномъ увеличеніи числа его сторонъ, равенъ площади круга;

b) предѣлъ объема правильной вписанной въ цилиндръ призмы, при безграничномъ увеличеніи числа ея граней, равенъ объему цилиндра;

c) предѣлъ суммы членовъ выше разсмотрѣнной геометрич. прогрессіи, при безграничномъ увеличеніи числа членовъ, равенъ 2. Послѣднюю фразу замѣняютъ слѣдующею записью:

$$\text{пр. } S_{n\to\infty} = 2.$$

Значекъ:

$$n \to \infty$$

означаетъ, что число членовъ n безгранично увеличивается.

Мы будемъ пользоваться этимъ значкомъ и впослѣдствіи. Если будетъ написано, напримѣръ:

$$x \to 3,$$

то это значитъ, что **x неограниченно приближается къ числу 3, никогда однако его не достигая;**

d) $$\text{Пред.} \left(\frac{x-1}{x}\right)_{x\to\infty} = 1.$$

10. Формулируемъ же теперь опредѣленіе:

Число A называется предѣломъ перемѣннаго числа X, при нѣкоторомъ опредѣленномъ процессѣ его измѣненія, если:

1) **A есть число постоянное,**

2) **Разность A—X есть число безконечно-малое.**

Если X зависитъ отъ перемѣннаго числа x и стремится къ предѣлу A при безграничномъ приближеніи x къ k, то это обстоятельство выражаютъ записью:

$$\text{пр. } \underset{x\to k}{X} = A.$$

Обращаемъ особое вниманіе читателя на опредѣленіе предѣла,—въ немъ заключается вся сущность теоріи предѣловъ, и его надо понять и усвоить вполнѣ.

11. Разберемъ еще нѣсколько примѣровъ на разысканіе предѣловъ.

Примѣръ 1-ый.

$$\text{Пред. } \underset{x\to 0}{\cos x} = 1.$$

Дѣйствительно:

a) 1 есть число постоянное;

b) $1 - \text{Cos}\, x = 2\, \text{Sin}^2 \frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$

и потому: $1 - \text{Cos}\, x =$ б. м. ч.

Примѣръ 2-ой.

$$\text{Пред.} \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)_{x \to 2} = 4.$$

Дѣйствительно:

a) 4 есть число постоянное;

b) чтобы убѣдиться въ томъ, что разность между 4 и значенiемъ дроби $\frac{x^2-4}{x-2}$, при безграничномъ приближенiи x къ 2, есть число безконечно-малое, положимъ $x = 2 \pm \alpha$, гдѣ α безконечно-малое положительное число, и опредѣлимъ разность между 4 и данною дробью:

$$4 - \frac{x^2-4}{x-2} = \mp \alpha = \text{б. м. ч.}$$

Слѣдовательно, предѣлъ данной дроби дѣйствительно равенъ 4 *).

12. Обратимъ вниманiе на слѣдующее очень **важное обстоятельство:** въ примѣрѣ 1-мъ x какъ угодно близко приближается къ 0, но никогда не дѣлается равнымъ 0; въ примѣрѣ 2-мъ x какъ угодно близко приближается къ 2, но никогда не дѣлается равнымъ 2. Если-бы въ примѣрѣ 1-омъ въ выраженiе перемѣнной прямо подставили вмѣсто x ноль, то нашли бы частное значенiе перемѣнной при $x = 0$, а не предѣлъ, къ которому стремится это перемѣнное, когда x приближается къ 0.

Иногда это частное значенiе перемѣннаго числа совпадаетъ съ соотвѣтствующимъ предѣломъ, а иногда нѣтъ.

Такъ, въ примѣрѣ 1-омъ:

$$\text{пр.} \ \text{Cos}\, x_{x \to 0} = 1$$

и

$$(\text{Cos}\, x)_{x=0} = 1.$$

А въ примѣрѣ 2-мъ:

$$\text{пр.} \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)_{x \to 2} = 4,$$

---

*) Результатъ этотъ очевиденъ, п. ч. при всякомъ x, не равномъ **2**, дробь $\frac{x^2-4}{x-2}$ можетъ быть сокращена на $x - 2$ и приводится къ выраженiю $x + 2$, которое, при $x = 2 \pm \alpha$, обращается въ $4 \pm \alpha$.

a

$$\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)_{x=2}$$ — не существуетъ, ибо

дѣленіе на 0 невозможно.

13. Основныя теоремы о предѣлахъ.

1) **Перемѣнное число X, при одномъ и томъ же процессѣ измѣненія, не можетъ стремиться къ двумъ неравнымъ между собою предѣламъ A и B.**

Допустимъ противное. Тогда, значитъ, X измѣняясь, можетъ достигнуть такого значенія X_1, которое будетъ отличаться отъ A на α, гдѣ α безконечно-малое число, и отъ B на β, гдѣ β тоже безк. малое число т.-е.:

$$X_1 = A + \alpha$$
$$X_1 = B + \beta$$

Отсюда:

$$A + \alpha = B + \beta,$$

и

$$A - B = \beta - \alpha$$

Такъ какъ разность двухъ безконечно-малыхъ чиселъ равна нулю или безконечно-малому числу (§ 4), то изъ послѣдняго равенства получается выводъ, что разность двухъ постоянныхъ неравныхъ чиселъ равна нулю или безконечно-малому числу. Нелѣпость этого вывода заставляетъ отвергнуть предположеніе о томъ, что A не равно B.

2) **Предѣлъ безконечно-малаго числа α равенъ 0, ибо:**

$$0 - \alpha = -\alpha = \text{б. м. ч.}$$

3) **Пред. $(X - У + Z) =$ пр. $X -$ пр. $У +$ пр. Z.**

(Число перемѣнныхъ конечное).

4) **Пр. $(X\,У\,Z) =$ пр. X. пр. $У$. пр. Z.**

(Число перемѣнныхъ конечное).

5) **Пред. $\frac{X}{У} = \frac{\text{пр. } X}{\text{пр. } У}$, если пред. $у \neq 0$.**

6) **Пред. $X^m = (\text{пред. } X)^m$** (m—цѣлое пол. число).

7) **Пред. $\sqrt[m]{X} = \sqrt[m]{\text{пр. } X}$** (m—цѣлое пол. число).

Во всѣхъ этихъ теоремахъ предполагается существованіе предѣловъ перемѣнныхъ X, У, Z.

Методъ доказательства теоремъ 3—7 одинаковъ и усматривается изъ слѣдующаго доказательства теоремы 5-ой:

Пусть:

$$\text{пред. } X = A$$
$$\text{пред. } У = B$$

Тогда по опредѣленію предѣла:

$$X = A + \alpha.$$
$$У = B + \beta,$$

гдѣ α и β суть б. м. числа.

Слѣдовательно:

$$\frac{X}{У} - \frac{A}{B} = \frac{A+\alpha}{B+\beta} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha - A\beta}{B(B+\beta)} = \text{б. м. ч.}$$

Итакъ:

a) $\frac{A}{B}$ есть число постоянное,

b) разность между перем. числомъ $\frac{X}{У}$ и пост. числомъ $\frac{A}{B}$ есть число б. м.

Поэтому:

$$\text{пред.} \frac{X}{У} = \frac{A}{B} = \frac{\text{пр. } X}{\text{пр. } У}.$$

Теорема не имѣетъ мѣста, если:

$$\text{пр. } У = 0,$$

ибо дѣлить на 0 нельзя.

14. Всѣ эти теоремы приводятъ къ такому важному выводу: **если два (или болѣе) перемѣнныхъ числа X и У связаны какою-нибудь формулою, то такою же формулою связаны и ихъ предѣлы.**

Такъ если:

$$X = У^2 + 2 \lg У + 5 \operatorname{Sin} У,$$

то:

$$\text{пр. } X = (\text{пр. } У)^2 + 2 \lg \text{пр. } У + 5 \operatorname{Sin} \text{пр. } У.$$

Мы не можемъ доказать этого положенія во всей его общности и принимаемъ его за допущеніе, оправдываемое разсмотрѣнными частными случаями.

Значеніе метода предѣловъ заключается въ томъ, что онъ даетъ возможность простого перехода отъ соотношенія между перемѣнными числами къ соотношенію между ихъ предѣлами. Такъ, зная, что перемѣнные периметры P и p правильныхъ одноименныхъ многоугольниковъ, описанныхъ около окружностей C и c, относятся какъ ихъ радіусы R и r, т.-е.:

$$\frac{P}{p} = \frac{R}{r},$$

и еще зная, что:

$$\text{пред. } P = C$$
$$\text{пред. } p = c$$

заключаемъ, что:

$$\frac{\text{пр. } P}{\text{пр. } p} = \frac{C}{c} = \frac{R}{r}.$$

т.-е.: отношенiе окружностей равно отношенiю ихъ радiусовъ.

Перемѣнный объемъ W правильной призмы, вписанной въ цилиндръ, какъ извѣстно, выражается формулой:

$$W = Q \,.\, H,$$

гдѣ Q площадь вписаннаго многоугольника, служащаго основанiемъ призмы, а H высота цилиндра.

На основанiи теорiи предѣловъ заключаемъ, что:

$$\text{пр. } W = H.\ \text{пред. } Q,$$

но:

$$\text{пред. } W = \text{объему } V \text{ цилиндра},$$

а

$$\text{пр. } Q = \text{площади } S \text{ основанiя цилиндра}.$$

Поэтому:

$$V = SH.$$

15. Предѣлъ отношенiя двухъ безконечно-малыхъ чиселъ можетъ быть какимъ угодно числомъ (См. § 6), но намъ чаще всего придется встрѣчаться съ такимъ случаемъ, когда оба безконечно-малыя числа выражены въ зависимости отъ нѣкотораго третьяго, и когда **предѣлъ ихъ отношенiя равенъ нѣкоторому выраженiю, зависящему отъ конечнаго перемѣннаго числа x.** Напримѣръ, при α безк.-маломъ:

$$\text{пр. } \frac{2x\alpha + \alpha^2}{\alpha + \alpha^3} = 2x.$$

16. Если X есть безк.-большое число (§ 3) то, въ зависимости отъ знака его, **условно** пишутъ:

$$\text{пр. } X = +\infty.$$

или:

$$\text{пр. } X = -\infty.$$

Запись эта имѣетъ совершенно **условный характеръ,** ибо очевидно, что въ данномъ случаѣ не существуетъ никакого постояннаго числа, къ которому X безгранично приближается.

Точный смыслъ записи:

$$\text{пр. } X = +\infty$$

таковъ: перемѣнное число X, измѣняясь, достигаетъ такихъ положительныхъ значенiй, которыя могутъ превысить всякое данное положительное число, какъ бы велико оно ни было.

Точно такъ же интерпретируется запись: пред. $X = -\infty$.

Въ обоихъ случаяхъ предполагается (§ 3), что X, достигнувъ по абсолютной величинѣ значеній большихъ, напримѣръ, 10000, при дальнѣйшемъ измѣненіи все время остается больше 10000.

Пред. $\frac{\sin x}{x}_{x \to 0} = 1$.

17. Намъ впослѣдствіи понадобится знать предѣлъ отношенія $\frac{\sin x}{x}$ при безграничномъ приближеніи x къ нулю.

Докажемъ, что предѣлъ этого отношенія равенъ 1, и съ этою цѣлью покажемъ, что разность:

$$1 - \frac{\sin x}{x},$$

при сказанныхъ условіяхъ, есть число безконечно-малое. Будемъ пока считать, что $x > 0$ и замѣтимъ прежде всего, что эта разность всегда положительна, ибо:

$$\sin x < x.$$

Затѣмъ преобразуемъ эту разность слѣдующимъ образомъ:

$$1 - \frac{\sin x}{x} = \frac{x - \sin x}{x} = \text{б. м. ч.}$$

такъ какъ, по изв. теоремѣ тригонометріи, $x - \sin x < \frac{x^3}{4}$

Если x приближается къ нулю, оставаясь отрицательнымъ, то заключеніе не измѣнится, ибо:

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Вотъ табличка, показывающая измѣненіе отношенія $\frac{\sin x}{x}$ при уменьшеніи x:

x	$\frac{\sin x}{x}$
$\frac{\pi}{9}$	0,9798
$\frac{\pi}{18}$	0,9949
$\frac{\pi}{36}$	0,9987
$\frac{\pi}{180}$	0,99999

Обратимъ еще вниманіе на то обстоятельство, что, при $x=0$, перемѣнное число:

$$\frac{\operatorname{Sin} x}{x}$$

теряетъ смыслъ, а предѣлъ, къ которому оно стремится, при безграничномъ приближеніи x къ нулю, существуетъ и равенъ 1.

$$\text{Пред.}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n_{n\to\infty}$$

18. Намъ понадобится въ дальнѣйшемъ знать предѣлъ, къ которому стремится выраженіе:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

при безграничномъ увеличеніи n.

Въ подробныхъ курсахъ доказывается, что предѣлъ этотъ существуетъ и равенъ несоизмѣримому числу:

2,718281828459045 . . . . .

которое всегда обозначается буквою e. Мы укажемъ здѣсь *) только главныя основанія этого доказательства:

1) Съ увеличеніемъ n по абсолют. величинѣ выраженіе:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

постоянно возрастаетъ.

2) Постоянно возрастая, оно всегда остается меньше 3.

Изъ сопоставленія этихъ двухъ положеній заключаютъ, что:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

при безгр. возрастаніи n, стремится къ нѣкоторому предѣлу, равному или меньшему 3.

Величина этого предѣла указана выше:

Непосредственное вычисленіе значеній:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

*) Ниже, въ § 19, приводится строгое доказательство.

даетъ слѣдующую таблицу:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	Приращеніе.
1	2	—
2	2,25	0,25
3	2,37037	0,12037
4	2,44141	0,07104
5	2,48832	0,04691
6	2,52161	0,03339
7	2,54650	0,02489
1000	2,71694	—

Въ заключеніе предостерегаемъ отъ **ошибочнаго заключенія,** будто пред. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n_{n\to\infty}$ равенъ 1 на томъ основаніи, что каждый множитель его стремится къ 1: теорема о предѣлѣ степени (§ 13) предполагаетъ показателя степени конечнымъ, а здѣсь n безгранично возрастаетъ.

19. Приводимъ здѣсь точное доказательство того положенія, что выраженіе:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

при безграничномъ увеличеніи n, стремится къ нѣкоторому предѣлу, большему 2-хъ и меньшему 3-хъ.

Доказательство это основывается на слѣдующемъ постулатѣ:

Если перемѣнное число L, постоянно возрастая, всегда остается меньше нѣкотораго постояннаго числа K, то это число L стремится къ предѣлу, равному или меньшему K.

Доказательство теоремы раздѣлимъ на 3 части соотвѣтственно тремъ предположеніямъ:

a) n—возрастаетъ безпредѣльно, принимая только **цѣлыя положительныя значенія**

b) n—возрастаетъ безпредѣльно, принимая **всѣ положительныя значенія**

c) n—возрастаетъ безпредѣльно по абсолютной величинѣ, принимая **всѣ отрицательныя значенія.**

I) n—цѣлое положительное число.

а) По формулѣ бинома Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{n^3}+$$
$$+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n}$$

Или:

$$\left.\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\\+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}\right\}\ (A)$$

Примѣняя подобныя же преобразованія къ выраженію:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

получимъ:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+(n+1)\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{(n+1)\,.\,n}{1.2}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\cdot$$
$$\frac{1}{(n+1)^3}+\ldots+\frac{(n+1)n\ldots[n-(n-2)]}{1.2\ldots n}\cdot\frac{1}{(n+1)^n}+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

Или:

$$\left.\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+1+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\\+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}.\end{aligned}\right\}\ (B)$$

Сравнивая разложенія A и B, мы видимъ, что:

1) Первые два члена обоихъ разложеній одинаковы;

2) 3-й, 4-й, 5-й... члены разложенія B соотвѣтственно больше 3-го, 4-го, 5-го... членовъ разложенія A;

3) Въ разложеніи B есть лишній положительный членъ

$\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, котораго нѣтъ въ разложеніи A.

Отсюда заключаемъ, что:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Слѣдовательно выраженіе:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

возрастаетъ съ увеличеніемъ n.

b) Изъ разложенія A слѣдуетъ, что:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2.$$

c) Изъ того же разложенія A слѣдуетъ, что:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n},$$

а отсюда:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

Слѣдовательно:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

d) Итакъ выраженіе

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

постоянно возрастаетъ съ увеличеніемъ n, но остается меньше 3; слѣдовательно оно стремится къ нѣкоторому предѣлу, большему 2 и меньшему 3 (см. Лемму). Если обозначимъ этотъ предѣлъ буквою e, то, предполагая n цѣлымъ положительнымъ числомъ, имѣемъ право написать:

$$\text{Пред.}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

II) n—какое угодно положительное число.

Обозначимъ цѣлую часть числа n черезъ k. Тогда:

$$k \leqq n < k+1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(M)$$

$$\frac{1}{k} \geqq \frac{1}{n} > \frac{1}{k+1}$$

$$1+\frac{1}{k} \geqq 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{k+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^n \geqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^n.$$

Или, принимая во вниманіе (M):

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} > \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k}.$$

Теперь, имѣя въ виду, что:

$$\text{Пред.} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}_{k\to\infty} = e,$$

ибо k есть цѣлое положительное число, найдемъ предѣлы тѣхъ двухъ чиселъ, между которыми заключено $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$:

$$\text{Пред.} \left[1+\frac{1}{k}\right]^{k+1}_{k\to\infty} = \text{Пред.} \left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} \cdot \left(1+\frac{1}{k}\right)\right]_{k\to\infty} = \text{Пред.} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}_{k\to\infty} \cdot \text{Пред.} \left(1+\frac{1}{k}\right)_{k\to\infty} = e \cdot 1 = e.$$

$$\text{Пред.} \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k}_{k\to\infty} = \text{Пред.} \left\{\frac{\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}}{1+\frac{1}{k+1}}\right\}_{k\to\infty} =$$

$$= \frac{\text{Пред.} \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}_{k\to\infty}}{\text{Пред.} \left(1+\frac{1}{k+1}\right)_{k\to\infty}} = \frac{e}{1} = e.$$

Слѣдовательно, оба числа, между которыми заключено $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, при безграничномъ возрастаніи положительнаго числа n, стремятся къ одному и тому же предѣлу e. Поэтому, при тѣхъ же условіяхъ, къ тому же предѣлу стремится и выраженіе $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

Значитъ, при n положительномъ:

$$\text{Пред.} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

III) n—какое угодно отрицательное число.

Пусть: $n = -p$, гдѣ p положительное число.

Тогда:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-p} = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p} = \left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{p} = \left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{p-1} \cdot \left(1+\frac{1}{p-1}\right).$$

Слѣдовательно:

$$\text{Пред.} \left(1+\frac{1}{n}\right)_{n\to-\infty} = \text{Пред.} \left\{\left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{p-1} \cdot \left(1+\frac{1}{p-1}\right)\right\}_{p\to\infty} =$$

$$= \text{Пред.} \left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{p-1}_{p\to\infty} \cdot \text{Пред.} \left(1+\frac{1}{p-1}\right)_{p\to\infty} = e \cdot 1 = e.$$

Значитъ, во всѣхъ случаяхъ:

$$\text{Пред.}\left(1+\frac{1}{n}\right)_{n\to\infty}=e.$$

Тотъ же фактъ выражаютъ въ другой формѣ, полагая:

$$n=\frac{1}{\alpha},$$

гдѣ α стремится къ нулю при безграничномъ возрастанiи n:

$$\text{Пред.}\left(1+\frac{1}{n}\right)_{n\to\infty}=\text{Пред.}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha\to 0}=e.$$

Натуральные логариөмы. Модуль.

---

20. Замѣтимъ еще, что число e служитъ основанiемъ такъ называемой **натуральной** системы логариөмовъ, о замѣчательныхъ свойствахъ которой мы здѣсь говорить не можемъ. Но намъ необходимо показать, какъ перейти отъ одной системы логариөмовъ къ другой, т.-е. какъ, зная логариөмъ числа N при основанiи a, найти логариөмъ того же числа при основанiи k.

Такъ какъ:

$$N=k^{\lg_k N},$$

то, логариөмируя это равенство по основанiю a, получимъ:

$$\lg_a N=\lg_k N\lg_a k.$$

Отсюда:

$$\lg_k N=\lg_a N\cdot\frac{1}{\lg_a k.}$$

Слѣдовательно, логариөмъ какого-нибудь числа по новому основанiю (k) равенъ логариөму того же числа по старому основанiю (a), умноженному на **дробь, числитель которой равенъ 1, а знаменатель есть логариөмъ новаго основанiя, взятый по старому основанiю.** Эта дробь называется **модулемъ M новой системы логариөмовъ.**

Слѣдовательно, модуль M для перехода отъ натуральной системы логариөмовъ къ десятичной опредѣляется равенствомъ:

$$M=\frac{1}{\lg_e 10}=\frac{1}{\lg_{10}10\cdot\frac{1}{\lg_{10}e}}=\lg_{10}e=0{,}4342945.$$

Эквивалентныя безконечно-малыя числа.

21. Мы сейчасъ встрѣтили примѣръ двухъ безконечно-малыхъ чиселъ, x и Sin x, предѣлъ отношенія которыхъ равенъ 1. Тѣмъ же свойствомъ обладаютъ пары б. м. чиселъ: $\alpha-\alpha^3$ и $\alpha-\alpha^2$; $\alpha+3\alpha^2$ и α; 2α и $2\alpha+3\alpha^2+4\alpha^3$, ибо предѣлъ отношенія чиселъ каждой пары равенъ единицѣ.

Два безконечно-малыхъ числа, предѣлъ отношенія которыхъ равенъ 1, называются эквивалентными. Они, какъ увидимъ далѣе, имѣютъ большое значеніе въ анализѣ. Прежде ознакомленія съ ихъ свойствами приведемъ еще одинъ важный примѣръ эквивалентныхъ б. м. чиселъ.

22. При безконечно-маломъ α, $\lg_e(1+\alpha)$ и α **эквивалентны.**

Дѣйствительно;

$$\text{пр.}\,\frac{\lg_e(1+\alpha)}{\alpha}=\text{пр.}\,[{}^1/\alpha\,\lg_e(1+\alpha)]=\text{пр.}\lg_e(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=$$

$$=\lg_e\text{пр.}\,[1+\alpha]^{\frac{1}{\alpha}}=\lg_e e=1.$$

Докажемъ теперь двѣ очень важныя теоремы относительно эквивалентныхъ безк. малыхъ чиселъ.

23. Теорема 1-я. Предѣлъ отношенія двухъ безконечно-малыхъ чиселъ α **и** β **не измѣнится, если мы замѣнимъ** α **и** β **соотвѣтственно эквивалентными имъ безконечно-малыми числами** α' **и** β'.

Теорема эта предполагаетъ, что предѣлъ отношенія $\frac{\alpha}{\beta}$ равенъ конечному числу.

Доказательство заключается въ слѣдующемъ:

Такъ какъ:

$$\text{пр.}\,\frac{\alpha}{\alpha'}=1$$

и

$$\text{пр.}\,\frac{\beta}{\beta'}=1.$$

то:

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=1+\omega_1$$

$$\frac{\beta}{\beta'}=1+\omega_2,$$

гдѣ ω_1 и ω_2 суть б. м. числа.

Отсюда:

$$\alpha=\alpha'(1+\omega_1)$$
$$\beta=\beta'(1+\omega_2)$$
$$\text{и пр.}\frac{\alpha}{\beta}=\text{пр.}\frac{\alpha'(1+\omega_1)}{\beta'(1+\omega_2)}=\text{пр.}\frac{\alpha'}{\beta'}.\text{пр.}\frac{1+\omega_1}{1+\omega_2}=\text{пр.}\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

24. Значенiе этой теоремы заключается въ томъ, что она даетъ возможность, при разысканiи предѣла, **отношенiе сложныхъ б. м. чиселъ замѣнить отношенiемъ болѣе простыхъ безк. малыхъ чиселъ.**

Примѣръ 1-ый.

Найти пред. $\frac{\text{Sin}(3\alpha^3+5\alpha^2+7\alpha)}{\text{Sin}(\alpha^3+10\alpha^2+\alpha)}$, гдѣ α б. м. число.

Такъ какъ Sin x эквиваленtенъ съ x (§ 17), то:

$$\text{пр.}\frac{\text{Sin}(3\alpha^3+5\alpha^2+7\alpha)}{\text{Sin}(\alpha^3+10\alpha^2+\alpha)}=\text{пр.}\frac{3\alpha^3+5\alpha^2+7\alpha}{\alpha^3+10\alpha^2+\alpha}.$$

Такъ какъ далѣе:

$3\alpha^3+5\alpha^2+7\alpha$ эквивалентно съ 7α

и $\alpha^3+10\alpha^2+\alpha$ α,

то предѣлъ даннаго отношенiя равенъ:

$$\text{пр.}\frac{7\alpha}{7}=7.$$

Замѣтимъ, что, замѣняя:

$7\alpha+5\alpha^2+3\alpha^3$ черезъ 7α и $\alpha+10\alpha^2+\alpha^3$ черезъ α,

мы откидываемъ въ первомъ случаѣ: $5\alpha^2+3\alpha^3$, а во второмъ: $10\alpha^2+\alpha^3$, т.-е. откидываемъ б. м. числа высшихъ порядковъ по сравненiю съ членами: 7α и α.

Примѣръ 2-й.

Найти пред. $\frac{\text{Sin}^2 5\alpha}{\lg_e \text{Cos}\, 6\alpha}$, гдѣ α—б. м. ч.

Замѣчаемъ что:

$\text{Sin}^2 5\alpha$ эквивалентно $(5\alpha)^2$ т. е. съ $25\alpha^2$;

$$\lg_e \text{Cos}\, 6\alpha=\lg_e\sqrt{1-\text{Sin}^2 6\alpha}=\frac{1}{2}\lg_e(1-\text{Sin}^2 6\alpha).$$

Послѣднее выраженiе (§ 22) эквивалентно $\frac{1}{2}(-\text{Sin}^2 6\alpha)$, а это въ свою очередь эквивалентно $-\frac{1}{2}(6\alpha)^2=-18\alpha^2$, и поэтому:

$$\text{иск. пред.}=\text{пр.}\left(-\frac{25\alpha^2}{18\alpha^2}\right)=-\frac{25}{18}.$$

25. Теорема 2-я. Предѣлъ суммы безконечно-большого числа безконечно-малыхъ положительныхъ чиселъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots, \alpha_n$ **не измѣнится, если эти числа замѣнить соотвѣтственно эквивалентными имъ б. м. ч.:**

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_n.$$

Теорема эта предполагаетъ, что предѣлъ первой суммы равенъ конечному числу. Доказательство теоремы состоитъ въ слѣдующемъ:

По условію (см. пред. теорему):

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}=1+\omega_1 \text{ и } \beta_1=\alpha_1+\alpha_1\omega_1$$

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2}=1+\omega_2 \text{ и } \beta_2=\alpha_2+\alpha_2\omega_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\beta_n}{\alpha_n}=1+\omega_n \text{ и } \beta_n=\alpha_n+\alpha_n\omega_n,$$

гдѣ $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ суть б. м. ч.

Отсюда:

$$\Sigma\beta=\Sigma\alpha+(\alpha_1\omega_1+\alpha_2\omega_2+\ \ldots\ +\alpha_n\omega_n)\ ^*).$$

Если абсолютную величину наибольшаго изъ всѣхъ безконечно-малыхъ чиселъ $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ обозначимъ черезъ Ω, то очевидно, что:

$$\text{абс. вел. } (\alpha_1\omega_1+\alpha_2\omega_2+\ldots\alpha_n\omega_n)<\Omega(\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n)$$

а такъ какъ пр. $\Sigma\alpha$, по условію, конеченъ, то ясно, что:

$$\text{пр. } \Omega(\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n)=\text{пр. } \Omega\Sigma\alpha=0,$$

и потому:

$$\text{пр. } \Sigma\beta=\text{пр. } \Sigma\alpha$$

ч. и т. д.

26. Теорема эта имѣетъ важное значеніе, потому что при вычисленіи предѣла суммы безконечно-большого числа положительныхъ безконечно-малыхъ слагаемыхъ, даетъ возможность **замѣнить** данныя **безконечно-малыя** числа другими, **болѣе простыми**, имъ эквивалентными. Пояснимъ это примѣромъ.

Пусть требуется вычислить площадь OAA′ (чер. 1-й), ограниченную дугой OA′ параболы, заданной уравненіемъ:

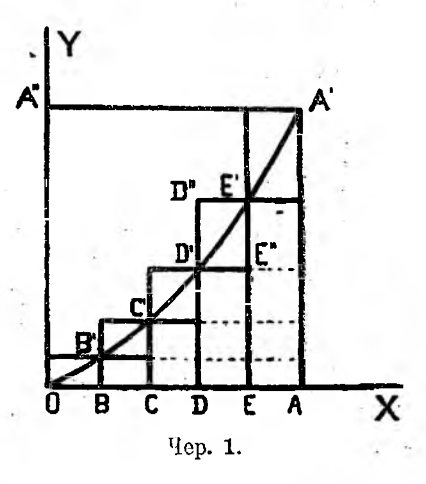
$$y = x^2,$$

и прямыми: OA и AA′

---

*) $\Sigma\beta=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n$ $\Sigma\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n$.

Если мы раздѣлимъ OA на n равныхъ частей и построимъ сѣть параллельныхъ прямыхъ (см. чертежъ), то очевидно, что интересующую насъ площадь мы можемъ разсматривать, какъ сумму площадей криволинейныхъ трапецій.



Чер. 1.

Однако вычисленіе площади каждой трапеціи не легче, чѣмъ вычисленіе всей данной площади,—слѣдовательно этотъ пріемъ не приноситъ намъ пока никакой пользы. Но будетъ совсѣмъ иначе, если мы, безгранично увеличивая число n, вмѣсто каждой криволинейной трапеціи, возьмемъ входящій или выходящій, прямоугольникъ (напр. DD″E′E), п. ч. площадь прямоугольника мы вычислять умѣемъ. Однако, **имѣемъ ли мы право замѣнить площадь криволинейной трапеціи площадью прямоугольника?** Да, если мы докажемъ, что обѣ эти площади выражаются безконечно-малыми эквивалентными числами. Что обѣ эти площади безконечно-малы,— это слѣдуетъ изъ предположенія о безграничномъ увеличеніи n, а эквивалентность доказывается такъ. Отношеніе площади выходящаго прямоугольника къ площади соотвѣтствующей криволинейной трапеціи очевидно меньше отношенія площади того же **выходящаго** прямоугольника къ площади соотвѣтствующаго **входящаго** прямоугольника, т.-е. меньше отношенія:

$$\frac{EE'}{DD'}$$

и въ то же время оно больше 1. Но отношеніе $\frac{EE'}{DD'}$, при безграничномъ увеличеніи n, стремится къ 1. Поэтому, оказывается, что отношеніе площади выходящаго прямоугольника къ площади соотвѣтствующей криволинейной трапеціи всегда заключается между двумя числами, изъ которыхъ одно есть 1, а другое безгранично приближается къ 1. Слѣдовательно, предѣлъ этого отношенія равенъ 1, и мы здѣсь, дѣйствительно, имѣемъ дѣло съ эквивалентными безконечно-малыми числами. Такимъ образомъ вопросъ о вычисленіи площади сегмента параболы сводится къ вопросу о разысканіи предѣла суммы площадей прямоугольниковъ. Пусть

$$OA = x;\ \frac{x}{n} = \Delta \text{ и положимъ, что:}$$

$$OE = k\Delta.$$

Тогда изъ уравненія параболы: $y=x^2$ заключаемъ, что:

$$EE'=k^2\Delta^2$$

и, слѣдовательно, площадь прямоугольника DEE'D'' выражается числомъ:

$$k^2\Delta^3.$$

Суммируя это выраженіе, въ предѣлахъ отъ $k=1$ до $k=n$, получимъ:

$$\Delta^3(1^2+2^2+\ldots+n^2)=\frac{\Delta^3}{6}n(n+1)(2n+1)\ ^{*}).$$

Переходя теперь къ предѣлу при $n\to\infty$, найдемъ, что искомая площадь равна:

$$\frac{x^3}{3}=\frac{x^2.x}{3}=\frac{yx}{3}.$$

Слѣдовательно, дуга параболы раздѣляетъ прямоугольникъ OAA'A'' на двѣ такія неравныя части, что одна вдвое болѣе другой.

27. Пріемы, подобные изложенному въ предыдущемъ параграфѣ, могутъ быть примѣнены къ разысканію объема треугольной пирамиды, объема шара и пр. Объемъ пирамиды найдется, какъ предѣлъ суммы объемовъ вписанныхъ въ нее или описанныхъ около нея призмъ (см. геом. Киселева, изд. 21, стр. 327); для опредѣленія объема полушара разсѣчемъ его рядомъ безконечно-близкихъ параллельныхъ основанію плоскостей на слои и докажемъ, что объемъ каждаго слоя эквивалентенъ объему цилиндра построеннаго на меньшемъ основаніи и пр. Совѣтуемъ читателю попробовать свои силы на этихъ интересныхъ примѣрахъ.

Функціи.

28. Понятіе о функціи мы считаемъ извѣстнымъ читателю, но все-таки напоминаемъ опредѣленіе функціи:

Если каждому вещественному значенію перемѣннаго числа x соотвѣтствуетъ одно или нѣсколько опредѣленныхъ значеній другого перемѣннаго числа y, то x называется независимымъ перемѣннымъ или аргументомъ, а y функціей x или функціей аргумента. Выборъ аргумента, въ области его измѣненія, зависитъ отъ

*) Если читателю неизвѣстна формула для суммы квадратовъ натуральныхъ чиселъ то предлагаемъ провѣрить ее на небольшихъ числахъ, а затѣмъ оправдать по способу заключенія отъ n къ n+1.

нашего произвола, но каждое выбранное значенiе его даетъ одно или нѣсколько совершенно опредѣленныхъ значенiй функцiи.

Если **функцiя дана,** то это значитъ, что **указано правило,** какъ, по данному значенiю x, найти значенiе y.

Напримѣръ:

$$y=x^2; \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$

$$y=\pm\sqrt{x} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

— y равно 0, когда x число рацiональное, и y=1, когда x число иррацiональное. . . . . (c)

Въ нашемъ курсѣ мы **по преимуществу** будемъ разсматривать такiя функцiи, которыя опредѣляются при помощи формулы, указывающей, какiя дѣйствiя надо выполнить надъ x, чтобы получить y (примѣры a, b). Въ примѣрѣ (b) каждому значенiю x отвѣчаютъ два значенiя y; подобнаго рода функцiи называются **многозначными.** Мы **по преимуществу** будемъ имѣть дѣло съ **однозначными** функцiями. Замѣтимъ, что двузначную фунцiю:

$$y=\pm\sqrt{x}$$

можно разсматривать, какъ двѣ однозначныя:

$$y=+\sqrt{x}$$

$$\text{и } y=-\sqrt{x}$$

Если y есть функцiя x, напримѣръ:

$$y=2x+1,$$

то обыкновенно и x есть функцiя y:

$$x=\frac{y-1}{2}.$$

Эта функцiя называется **обратной** по отношенiю къ прямой:

$$y=2x+1.$$

Не всякая функцiя имѣетъ обратную. Такъ, напримѣръ, функцiя указанная въ примѣрѣ c, очевидно не имѣетъ обратной.

Перемѣнное число можетъ зависѣть не отъ одного, а отъ двухъ или болѣе аргументовъ, напримѣръ:

$$y=x^2+2xt.$$

Въ этомъ случаѣ говорятъ, что y есть функцiя x и t.

29. Обратимъ вниманiе еще на слѣдующее важное обстоятельство. При нѣкоторыхъ исключительныхъ значенiяхъ икса y можетъ не имѣть смысла. Напримѣръ, если:

$$y=\frac{1}{x-2},$$

то при $x=2$ функція теряетъ смыслъ. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что функція **не опредѣлена** при $x=2$. Тоже относится къ функціи $\sin\frac{1}{x}$ при $x=o$.

30. Если желаютъ выразить, что y есть нѣкоторая функція x, то употребляютъ слѣдующее обозначеніе:

$$y=f(x),$$

которое читается такъ: «y есть функція x».

Для обозначенія какой-либо другой функціональной зависимости употребляются знаки: $F(x)$, $\varphi(x)$ и пр.

Если напримѣръ:

$$f(x)=(x+1)^2,$$

то функцію:

$$\sin^2 x+\lg x$$

нельзя уже обозначить (въ томъ же вопросѣ) черезъ $f(x)$, а придется прибѣгнуть къ обозначенію $\Phi(x)$, $\varphi(x)$ или другимъ подобнымъ.

31. Съ обозначеніемъ $f(x)$ надо вполнѣ освоиться и, ради этого, необходимо рѣшить слѣдующія задачи:

$$f(x)=2x^2-x+4.$$

1) Найти: $f(1)$ и $f(o)$.

$$f(1)=2\,.\,1^2-1+4=5;\ f(o)=4.$$

2) найти $f(1+h)$.

$$f(1+h)=2(1+h)^2-(1+h)+4=2h^2+3h+5.$$

3) Что больше: $f(1+h)$ или $f(1)$, и на сколько, предполагая $h>o$?

$$f(1+h)-f(1)=(2h^2+3h+5)-5=2h^2+3h.$$

Слѣдовательно, при $h>o$:

$$f(1+h)>f(1).$$

Притомъ:

$$f(1+h)-f(1)=\varphi(h),$$

и числовая величина разности зависитъ отъ h.

4) Найти:

$$f(x+h)-f(x).$$

$$f(x+h)-f(x)=\{2(x+h)^2-(x+h)+4\}-(2x^2-x+4)=4xh+2h^2-h.$$

Слѣдовательно, эта разность зависитъ отъ x и h и можетъ быть обозначена черезъ $\psi(x, h)$.

5) Опредѣлить $f(-x)$.

$$f(-x)=2(-x)^2-(-x)+4=2x^2+x+4.$$

6) Опредѣлить $f(2x)$.

$$f(2x)=2(2x)^2-(2x)+4=8x^2-2x+4.$$

7) $$f(x)=x^2-2x+1$$
$$\varphi(x)=x^3\,.$$

Опредѣлить: $f[\varphi(x)]$ и $\varphi[f(x)]$

$$f[\varphi(x)]=(x^3)^2-2(x^3)+1=x^6-2x^3+1$$
$$\varphi[f(x)]=(x^2-2x+1)^3.$$

32. Простѣйшія функціи суть:

Цѣлая раціональная функція, напримѣръ:

$$y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e.$$

Дробная раціональная, напримѣръ:

$$y=\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{mx^2+nx+p}.$$

Ирраціональная функція, напримѣръ:

$$y=x^2+\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}\,.$$

Показательная функція:

$$y=a^x.$$

Логариѳмическая функція:

$$y=\log x.$$

Тригонометрическія функціи:

$$y=\sin x;\ y=\cos x,\ y=\operatorname{tg} x \text{ и пр.}$$

Первые три типа называются **алгебраическими функціями**, а послѣдніе три—**трансцедентными.**

Непрерывность.

33. Обычное понятіе о непрерывномъ измѣненіи какой-нибудь конкретной величины заключается въ томъ, что величина эта измѣняется постепенно, безъ скачковъ, проходя послѣдовательно черезъ всѣ значенія, промежуточныя между двумя крайними. Тоже понятіе примѣняется и къ непрерывности функціи. Мы считаемъ функцію непрерывною, если весьма малымъ измѣненіямъ аргумента соотвѣтствуютъ весьма малыя измѣненія функціи.

Это опредѣленіе не вполнѣ точно, ибо терминъ «весьма малое измѣненіе» неопредѣлененъ, и мы далѣе введемъ коррективы. Но даже съ точки зрѣнія этого опредѣленія ясно, что далеко не всѣ функціи непрерывны. Такъ, напримѣръ, функція, выражающая сумму S угловъ выпуклаго многоугольника въ зависимости отъ числа n его сторонъ:

$$S=2d\ (n-2)$$

не есть непрерывная функція, потому что здѣсь невозможно «весьма малое измѣненіе» аргумента: здѣсь аргументъ измѣняется скачками, переходя черезъ цѣлыя значенія 3, 4; 5 и пр. Поэтому, далѣе мы будемъ говорить только о такихъ функціяхъ, **аргументъ которыхъ x измѣняется въ данной области (a, b) непрерывно.** Это надо понимать такъ: **x возрастая отъ a (мы считаемъ; a < b) проходитъ черезъ всѣ вещественныя значенія, промежуточныя между a и** b. Если, напримѣръ, x измѣняется непрерывно въ области (1, 2), то это значитъ, что x пробѣгаетъ черезъ всѣ дѣйствительныя числа между 1 и 2, включая сюда 1 и 2 *):

$$1;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ .\ .\ .\ \sqrt{2};\ .\ .\ .\ \sqrt{3}\ \ 1\tfrac{19}{21};\ 2.$$

Сдѣлавъ эту существенную оговорку, исправимъ затѣмъ первоначальную редакцію опредѣленія, замѣнивъ въ ней неопредѣленный терминъ «весьма мало измѣненіе» совершенно точнымъ— «безконечно-малое измѣненіе» и, кромѣ того, укажемъ, при какихъ значеніяхъ x разсматривается непрерывность функціи.

34. Тогда мы получимъ слѣдующую точную редакцію опредѣленія непрерывности.

a. **Функція f (x) **) непрерывна при x=a, если безконечно-малому приращенію** h **(положительному и отрицательному) аргумента соотвѣтствуетъ безконечно-малое приращеніе:**

$$f\ (a+h)-f\ (a)$$

функціи.

Иначе говоря, функція будетъ непрерывна при x=a, если можно подыскать такое h, при которомъ абсолютная величина разности:

$$f\ (a+h)-f\ (a)$$

будетъ менѣе всякаго напередъ заданнаго положительнаго числа.

*) Если не сдѣлано особыхъ оговорокъ относительно предѣловъ 1 и 2.

**) Здѣсь разсматриваются только такія области измѣненія функціи, въ которыхъ она не принимаетъ мнимыхъ значеній.

Напримѣръ, $f(x)=x^2$ непрерывна при $x=2$, потому что неравенство:

$$|(2+h)^2-2^2|<\frac{1}{100}.$$

удовлетворяется при:

$$|h|<\frac{1}{500}$$

b. **Функція непрерывна въ интервалѣ (a, b), если она непрерывна для всѣхъ значеній внутри этого интервала.**

Напримѣръ функція x^2, непрерывная при всѣхъ дѣйствительныхъ значеніяхъ x, непрерывна въ интервалѣ $(-\infty, +\infty)$.

35. Вникнемъ теперь глубже въ смыслъ этого опредѣленія. Въ немъ идетъ рѣчь о разности:

$$f(a+h)-f(a)$$

и требуется, чтобы эта разность была безконечна мала, а для этого, прежде всего, необходимо, чтобы разность эта имѣла смыслъ, т.-е., чтобы уменьшаемое и вычитаемое были опредѣленныя числа, иначе говоря, необходимо **чтобы f (x) была вполнѣ опредѣлена при x** $=a$ *) (a — **конечное число**). Если это условіе не выполнено, т.-е. если f (x) не опредѣлена при $x=a$ (напримѣръ $\frac{1}{x-2}$ при $x=2$), то непрерывности при $x=a$ не существуетъ, и говорятъ, что при $x=a$ функція **претерпѣваетъ разрывъ** (въ случаѣ $\frac{1}{x-2}$ при $x=2$).

Это во-первыхъ. Во-вторыхъ, если f (x) опредѣлена при x=a, но **разность:**

$$f(a+h)-f(a)$$

не есть число безконечно-малое, то при x=a **будетъ тоже разрывъ** функціи. (Примѣръ будетъ приведенъ далѣе).

Въ нашемъ курсѣ мы будемъ разсматривать непрерывныя функціи, претерпѣвающія разрывы только при нѣкоторыхъ исключительныхъ значеніяхъ x.

36. Покажемъ теперь способы изслѣдованія непрерывности и разрывовъ нѣкоторыхъ функцій.

a) Всякая цѣлая алгебр. функція относительно x непрерывна при всякомъ значеніи x.

Дѣйствительно, разсмотримъ, напримѣръ, функцію:

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

и составимъ разность:

$$f(x+h)-f(x)=h(2ax+b)+ah^2.$$

---

*) Мы предполагаемъ, что если f (a) опредѣлена, то опредѣлена и f ($a \pm h$), гдѣ h полож. б. м. число, и разсматриваемъ только это предположеніе.

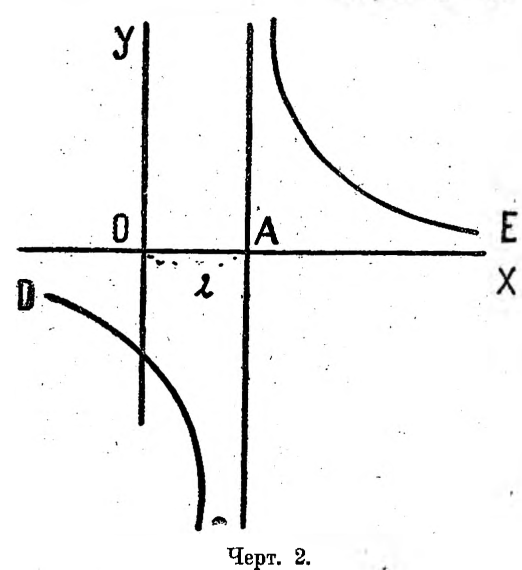
Такъ какъ оба члена этой разности безконечно-малы при всякомъ конечномъ значенiи x и при безконечно-маломъ h, то функцiя непрерывна при всякомъ значенiи x. Разрывовъ нѣтъ.

b) Функцiя $f(x)=\frac{4}{x-2}$ непрерывна при всѣхъ значенiяхъ x, кромѣ x=2. При x=2 она претерпѣваетъ разрывъ, ибо теряетъ смыслъ, обращаясь въ:

$$\frac{4}{0}.$$

Непрерывность этой функцiи при всѣхъ другихъ значенiяхъ x вытекаетъ изъ состава разности:

$$f(x+h)-f(x)=\frac{4}{x+h-2}-\frac{4}{x-2}=-\frac{4h}{(x-2)(x+h-2)}.$$



Черт. 2.

Разсмотримъ еще, какъ измѣняется f(x) около точки разрыва. Такъ какъ при безк.-маломъ положительномъ α:

$$f(2-\alpha)=-\infty$$
$$f(2+\alpha)=+\infty$$

то, значитъ, при переходѣ x отъ $2-\alpha$ къ $2+\alpha$, т.-е. при измѣненiи x на безконечно-малое число 2α, функцiя дѣлаетъ скачокъ (см. чертежъ 2-й) съ $-\infty$ на $+\infty$.

c) $f(x)=\sin x$ непрерывна при всѣхъ значенiяхъ x, что слѣдуетъ изъ равенства:

$$f(x+h)-f(x)=\sin(x+h)-\sin x=2\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Легко видѣть, что абс. вел. послѣдняго выраженiя меньше $|h|$.

d) Пусть f(x) задана такимъ образомъ:

1) Въ интервалѣ $(-\infty, 1)$: $f(x)=x$

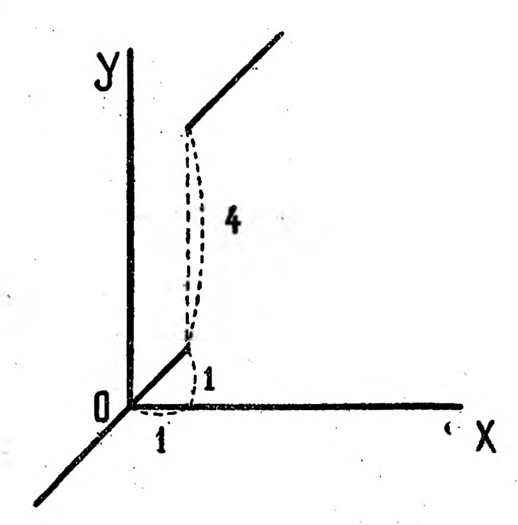
2) При $x>1$: $f(x)=4+x$

Здѣсь функцiя опредѣлена для всѣхъ значенiй x отъ $-\infty$ до $+\infty$, и однако при x=1 будетъ разрывъ (см. черт. 3), п. ч. функцiя сразу переходитъ отъ 1 къ значенiямъ, большимъ 4. Понятно, что при всѣхъ другихъ значенiяхъ икса f(x) непрерывна.

e) Функцiя tgx разрывается при $x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ и вообще при:

$$x=\frac{(2k+1)\pi}{2}$$

и непрерывна при всѣхъ другихъ значеніяхъ x. Провѣрку этого утвержденія пусть сдѣлаетъ самъ читатель.



Черт. 3.

Подобными же, а иногда и болѣе сложными пріемами доказывается, что:

f) функція $a^x (a > o)$ непрерывна для всякаго конечнаго значенія аргумента и пред. $a^x_{x \to o} = 1$

g) lgx непрерывенъ для всякаго положительнаго и конечнаго значенія x, кромѣ x=o.

h) Сумма, произведеніе нѣсколькихъ непрерывныхъ въ области (a, b) функцій и частное двухъ такихъ же функцій суть также функціи непрерывныя, въ той же области; при чемъ для функціи, равной частному отъ дѣленія двухъ другихъ функцій, исключаются тѣ значенія аргумента, которыя обращаютъ знаменателя въ 0; цѣлая положительная степень непрерывной въ области (a, b) функціи и корень съ цѣлымъ положительнымъ показателемъ изъ такой же функціи суть также функціи непрерывныя въ той же области.

Устраненіе разрыва непрерывности.

37. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, когда функція не опредѣлена при данномъ значеніи x, можно устранить разрывъ ея при этомъ значеніи x введеніемъ дополнительныхъ условій. Напримѣръ, функція:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

не опредѣлена при x=2 и потому разрывается при x=2. Однако если мы введемъ дополнительное условіе, что при x=2:

$$f(x) = \text{пред.}_{x \to 2}\, f(x) = 4,$$

то значеніе функціи всегда будутъ опредѣляться равенствомъ:

$$f(x) = x + 2,$$

и слѣдовательно разрыва не будетъ.

Тоже относится къ разрыву:

$$f(x) = \frac{\text{Sin } x}{x}$$

при x=o; онъ будетъ устраненъ, если мы введемъ дополнительное условіе:

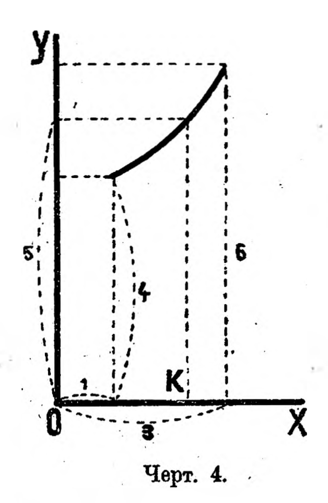
$$f(o) = \text{пр.} \left(\frac{\text{Sin } x}{x}\right)_{x \to o} = 1.$$

Однако понятно, что никакими дополнительными условіями нельзя устранить разрыва функціи:

$$\frac{1}{x-2}$$

при x=2.

Основное свойство непрерывной функціи.



Черт. 4.

38. Пояснимъ его сначала на частномъ примѣрѣ. Пусть f (x) непрерывна въ интервалѣ (1, 3) и пусть:

$$f(1)=4$$
$$f(3)=6$$

Тогда мы утверждаемъ (черт. 4), что существуетъ въ данномъ интервалѣ по крайней мѣрѣ одно такое значеніе x=OK, при которомъ f (x)=5 или вообще — любому числу, промежуточному между 4 и 6.

Значитъ, мы приписываемъ непрерывной въ данномъ интервалѣ функціи то свойство, что она **переходитъ въ данномъ интервалѣ отъ одного своего значенія a къ другому b, проходя одинъ или нѣсколько разъ черезъ всѣ значенія, промежуточныя между a и b.** Мы принимаемъ это свойство безъ доказательства *).

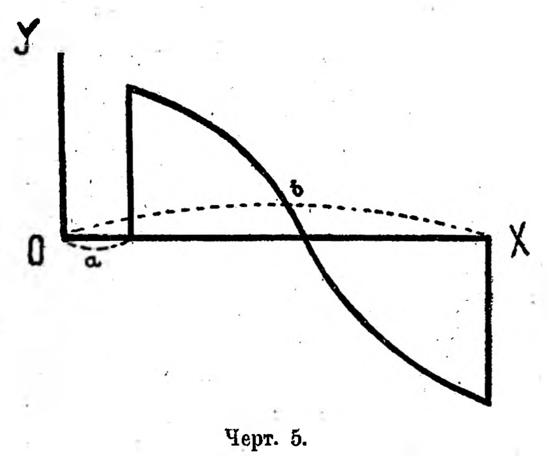
39. Слѣдствіе. Если f(x), непрерывная въ области (a, b), положительна при x=a и отрицательна при x=b (см. черт. 5), **то она по крайней мѣрѣ одинъ разъ обратится въ 0 при нѣкоторомъ значеніи x, промежуточномъ между a и b.**

Это потому, что f (x), переходя отъ положительнаго значенія къ отрицательному, должна пройти черезъ всѣ промежуточныя между ними значенія, а слѣдовательно и черезъ 0.

Примѣръ. $f(x)=x^3+x-2$. $f(0)=-2$; $f(2)=8$.

Слѣдовательно, f (x) обращается въ 0 при x, промежуточномъ между 0 и 2.

И дѣйствительно f (1)=0.



Черт. 5.

*) Мы неявно пользовались этимъ свойствомъ и ранѣе—при построеніи графиковъ функцій.

Предѣлы функцій.

40. а) При разысканіи предѣла f(x), когда x стремится къ нѣкоторому числу a, независимое перемѣнное x можетъ измѣняться или

непрерывно (§ 33),
или **прерывно**,

проходя не черезъ всѣ значенія въ данной области, а только черезъ нѣкоторыя.

Когда мы разыскивали (§ 12) пред. $\mathrm{Cos}\, x_{x \to 0}$, то неявно предполагали, что x измѣняется **непрерывно**. Но если разыскивается предѣлъ площади правильнаго вписаннаго въ кругъ многоугольника при безграничномъ увеличеніи числа x его сторонъ, то здѣсь x принимаетъ только цѣлыя значенія и, слѣдовательно, измѣняется **прерывно**.

Большею частью

$$\text{пред. } f(x)_{x \to a}$$

будетъ одинаковъ какъ при прерывномъ, такъ и при непрерывномъ процессѣ измѣненія x, однако такъ бываетъ не всегда. Вотъ примѣръ:

$$\text{пред. } \mathrm{Sin}\frac{\pi}{x}$$

при **непрерывномъ приближеніи x** къ нулю не существуетъ, ибо $\mathrm{Sin}\frac{\pi}{x}$ постоянно колеблется между -1 и $+1$.

Если же мы положимъ:

$$x = \frac{n}{n^2+1}$$

и будетъ безгранично увеличивать n, оставляя его цѣлымъ числомъ, то x, стремясь къ 0, будетъ измѣняться **прерывно** и:

$$\text{пред. } \mathrm{Sin}\frac{\pi}{x}_{x \to 0} = \text{пред. } \mathrm{Sin}\frac{(n^2+1)\pi}{n}_{n \to \infty} = \pm \mathrm{Sin}\frac{\pi}{n}_{n \to \infty} = 0.$$

Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ предѣлъ существуетъ и равенъ 0.

При другомъ **прерывномъ** законѣ измѣненія x предѣлъ будетъ иной. Дѣйствительно, если:

$$x = \frac{2(4n+1)}{(4n+1)^2+1},$$

то, при безграничномъ возрастаніи цѣлаго числа n:

$$\text{пред. } \operatorname{Sin} \frac{\pi}{x}_{x \to o} = \text{пред. } \operatorname{Sin} \left\{ \frac{(4n+1)\pi}{2} + \frac{\pi}{2(4n+1)} \right\}_{n \to \infty} = \text{пред. } \operatorname{Cos} \frac{\pi}{2(4n+1)}_{n \to \infty} = 1.$$

Значитъ, и въ этомъ случаѣ предѣлъ существуетъ, но онъ иной, чѣмъ прежде: теперь 1, а прежде былъ 0.

Такое измѣненіе предѣла, въ зависимости отъ измѣненія закона приближнеія x къ нулю, указываетъ на несуществованіе одного общаго предѣла, къ которому стремится

$$\operatorname{Sin} \frac{\pi}{x},$$

когда x, измѣняясь непрерывно, стремится къ 0.

Во всякомъ случаѣ при разысканіи

$$\text{пред. } f(x)_{x \to a}$$

необходимо всякій разъ указывать, какое предполагается измѣненіе x—непрерывное или прерывное.

b) Иногда предѣлъ f(x) будетъ различенъ, въ зависимости отъ того, приближается ли x къ данному значенію, оставаясь постоянно больше его или оставаясь постоянно меньше его. Пусть, напримѣръ:

$$f(x) = \frac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}.$$

Если x непрерывно приближается къ 0, оставаясь все время положительнымъ, то:

$$\text{пред. } f(x)_{x \to o} = 0;$$

а если x непрерывно приближается къ 0, оставаясь все время отрицательнымъ, то:

$$\text{пред. } f(x)_{x \to o} = 1.$$

Замѣтимъ попутно, что частное значеніе функціи при $x=0$ лишено смысла, ибо показатель $\frac{1}{x}$ при $x=0$ теряетъ смыслъ.

Основанія анализа безконечно-малыхъ.

41. Предметъ курса. Та часть курса анализа безконечно-малыхъ, которая подлежитъ нашему изученію, занимается изслѣдованіемъ измѣненій функцій, т.-е. разысканіемъ областей ихъ возрастанія, убыванія, постоянства, достиженія ими maximum'овъ *) и minimum'овъ; она также даетъ общіе пріемы для построенія касательныхъ къ кривымъ, для вычисленія площадей, объемовъ и пр.

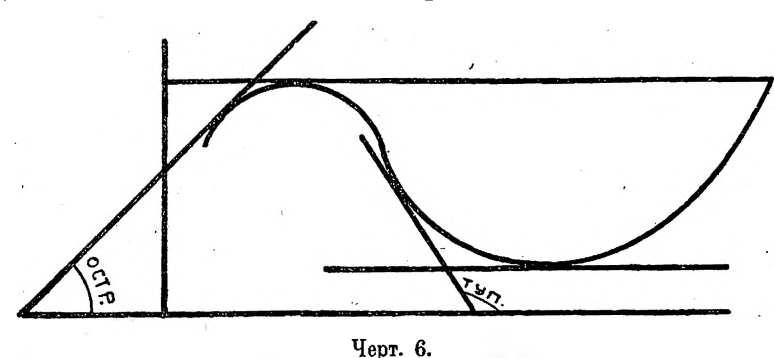
Количественное изученіе всякаго опредѣленнаго процесса природы сводится къ установленію нѣкоторой функціональной зависимости между числами, измѣряющими входящія въ данный процессъ величины $\left(s = \frac{gt^2}{2};\ v_0\, p_0 = \frac{v_t\, p_t}{1+\alpha t}\right)$

Слѣдовательно, анализъ безконечно-малыхъ неизбѣжно найдетъ себѣ примѣненіе во всѣхъ физическихъ, механическихъ, химическихъ и техническихъ вопросахъ при изслѣдованіи встрѣчающихся тамъ функціональныхъ зависимостей.

42. Предварительныя соображенія объ измѣненіи функцій. Понятіе о производной функціи.

Одна изъ главнѣйшихъ задачъ нашего курса заключается, какъ было сказано выше, въ изслѣдованіи измѣненій функцій, т.-е. въ опредѣленіи, въ какихъ областяхъ функціи увеличиваются, уменьшаются, остаются постоянными, достигаютъ maximum'овъ и minimum'овъ.

Непосредственное рѣшеніе этого вопроса сопряжено съ большими затрудненіями даже для простѣйшихъ функцій **), а между тѣмъ внимательный обзоръ графика какой-нибудь функціи $y=f(x)$ (черт. 6) позволяетъ намъ предвидѣть тѣсную связь вопроса



Черт. 6.

*) Здѣсь и далѣе говорится о max. и min. функціи, какъ о наибольшихъ и наименьшихъ значеніяхъ функціи по сравненію со смежными ея значеніями.

**) Предлагаемъ убѣдиться въ этомъ на примѣрѣ: $y=x^4-x+3$.

объ измѣненіи функціи съ положеніемъ касательной къ кривой въ разныхъ точкахъ ея: тамъ, гдѣ функція возрастаетъ, касательная образуетъ съ осью абсциссъ острый уголъ, гдѣ убываетъ—тупой; при достиженіи max. и min. касательная параллельна оси абсциссъ. Слѣдовательно, при возрастаніи функціи угловой коэффиціентъ касательной положителенъ, при убываніи—отрицателенъ, а при maximum'ѣ и minimum'ѣ—обращается въ 0.

Этотъ предварительный обзоръ чертежа, вовсе не имѣющій доказательнаго характера, убѣждаетъ насъ въ полезности разсмотрѣнія новой функціи $y'=F'(x)$, выражающей собою угловой коэффиціентъ касательной. Эту функцію называютъ **производной** по отношенію къ данной и обозначаютъ такъ, какъ это сейчасъ указано.

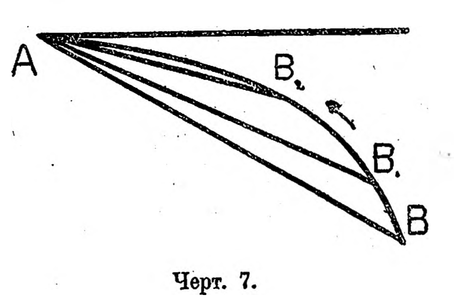
Мы теперь перейдемъ къ разысканію производной функціи, но прежде всего вдумаемся внимательнѣе въ вопросъ о томъ, что такое касательная къ кривой.

Что такое касательная къ кривой?

43: Въ элементарной геометріи касательная къ окружности опредѣлялась, какъ такая прямая, которая имѣетъ съ окружностью только одну общую точку. Но очевидно (см. черт. 6), что такое опредѣленіе не имѣетъ общаго характера, что мы, по нашему представленію о касательной, будемъ считать касательной и такую прямую, которая, занимая нѣкоторое опредѣленное положеніе, имѣетъ съ кривой двѣ или болѣе общія точки.

Чѣмъ же характеризуется положеніе касательной къ данной кривой въ нѣкоторой точкѣ ея A?

Проведемъ сначала черезъ точку A сѣкущую AB (черт. 7) и будемъ вращать ее по направленію стрѣлки.



Черт. 7.

Тогда, отдавая себѣ полный отчетъ въ томъ, что ни одна изъ ряда сѣкущихъ не совпадаетъ съ касательной въ точкѣ A, мы скажемъ все-таки, что AB ближе къ касательной, чѣмъ AB; AB_2 ближе къ касательной, чѣмъ AB_1 и AB и т. д. Очевидно, значитъ, что **касательная есть то предѣльное положеніе сѣкущей, къ которому послѣдняя стремится при безграничномъ приближеніи точки B къ точкѣ A.**

Отсюда ясенъ и способъ вывода углового коэффиціента касательной: **составьте угловой коэффиціентъ сѣкущей, какъ прямой, проходящій черезъ двѣ данныя точки A и B и ищите, къ какому предѣлу онъ стремится, когда точка B безгранично приближается**

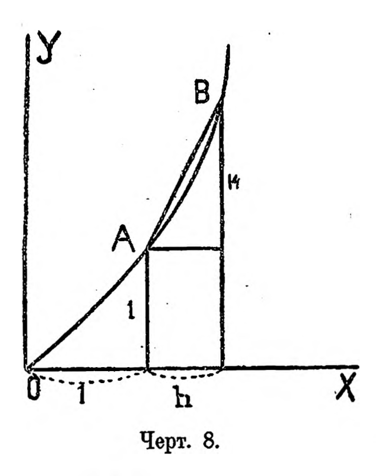
къ точкѣ А. Найденный предѣлъ и будетъ угловой коэффиціентъ касательной или, иначе говоря,—значеніе производной функціи при x, равномъ абсциссѣ точки А.

Поясвимъ это общее указаніе частными примѣрами.

44. Примѣръ 1-й. Найти угловой коэффиціентъ касательной къ параболѣ:

$$y = x^2$$

въ точкѣ А (1, 1) (черт. 8).



Черт. 8.

Возьмемъ на параболѣ точку В смежную съ точкой А, и пусть абсцисса этой точки будетъ $1+h$. Ордината точки В, при нашемъ чертежѣ, будетъ больше ординаты точки А на нѣкоторое число k, т.-е. будетъ $1+k$.

Угловой коэффиціентъ сѣкущей АВ, при этихъ обозначеніяхъ, очевидно, равенъ $\frac{k}{h}$.

Чтобы перейти отъ сѣкущей къ касательной, мы должны подводить точку В къ точкѣ А. При этомъ h и k будутъ стремиться къ 0, но къ какому числу будетъ стремиться предѣлъ ихъ отношенія?

Примѣнить здѣсь теорему о предѣлѣ частнаго (13,5) нельзя, т. к. предѣлъ знаменателя равенъ 0. Какъ же поступить? Такъ какъ k есть, очевидно, нѣкоторая функція отъ h, то необходимо выразить аналитически зависимость между k и h. Зависимость эта дается уравненіемъ параболы, ибо точка В находится на параболѣ, и, слѣдовательно, координаты ея удовлетворяютъ уравненію параболы, т.-е.:

$$1+k=(1+h)^2$$

Отсюда:

$$k=2h+h^2;$$

$$\frac{k}{h}=2+h;$$

$$\text{пр.} \frac{k}{h}_{h \to 0}=2$$

Слѣдовательно, угловой коэффиціентъ касательной къ данной параболѣ въ точкѣ (1, 1) равенъ двумъ. Зная этотъ угловой коэффиціентъ, мы можемъ написать уравненіе касательной:

$$y-1=2(x-1)$$

или построить касательную геометрически.

Найденный угловой коэффиціентъ представляетъ собою частное значеніе производной отъ функціи $y=x^2$ при $x=1$., т.-е.:

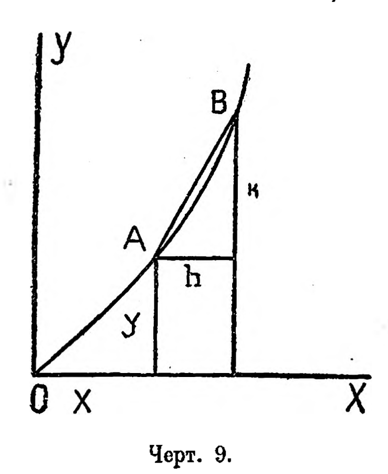
$$(y')_{x=1}=2$$

Какъ же найти самую производную?

45. Примѣръ 2-й. Найдемъ угловой коэффиціентъ касательной къ параболѣ:

$$y=x^2$$

въ любой ея точкѣ A, координаты которой суть (x, y). (Чер. 9).



Черт. 9.

Беремъ на кривой смежную съ A точку B съ координатами $(x+h,\ y+k)$ и видимъ, что угловой коэффиціентъ сѣкущей AB равенъ $\frac{k}{h}$. Чтобы найти, къ какому предѣлу онъ стремится, когда точка B безгранично приближается къ точкѣ A, надо найти сначала зависимость между h и k. Она дается уравненіемъ параболы:

$$y+k=(x+h)^2$$

Отсюда: $y+k=x^2+2xh+h^2$,

но такъ какъ, по уравненію параболы:

$$y=x^2,$$

то:

$$k=2xh+h^2$$

$$\frac{k}{h}=2x+h.$$

$$\text{пр.}\ \frac{k}{h}_{h\to 0}=2x.$$

Слѣдовательно, функція производная по отношенію къ функціи:

$$y=x^2$$

есть новая функція:

$$y'=2x.$$

Значеніе этой функціи при нѣкоторомъ опредѣленномъ значеніи x даетъ намъ угловой коэффиціентъ касательной въ соотвѣтствующей точкѣ кривой. Напримѣръ, при $x=1$, мы получимъ:

$$(y')_{x=1}=2,$$

согласно съ результатомъ, найденнымъ въ примѣрѣ 1-мъ.

Общее выраженіе производной.

46. Изъ вышеразобранныхъ примѣровъ слѣдуетъ, что:

$$\text{производная}=\text{пред.}\ \frac{k}{h},$$

гдѣ:

h выражаетъ приращенiе незав. перем. или абсциссы x
k ——————— функцiи или ординаты —— y

Если функцiя, соотвѣтствующая графику данной кривой, есть:

$$y=f(x),$$

то ордината, соотвѣтствующая абсциссѣ x, есть—$f(x)$
———————————————— $x+h$ есть—$f(x+h)$

Слѣдовательно, прикращенiе k опредѣляется формулой:

$$k=f(x+h)-f(x),$$

а отношенiе приращенiя k функцiи къ приращенiю h независимаго перемѣннаго есть:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$

предѣлъ этого отношенiя есть производная $f'(x)$ функцiи $f(x)$, т.-е.:

$$f'(x)=\text{пр.}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}_{h\to o}$$

Слѣдовательно, **производная есть предѣлъ отношенiя приращенiя функцiи къ приращенiю независимаго перемѣннаго, когда приращенiе независимаго перемѣннаго стремится къ 0.** Поэтому, **для отысканiя производной, надо:**

1) Составить приращенiе функцiи, соотвѣтствующее приращенiю h независимаго перемѣннаго.

2) Найти отношенiе этого приращенiя функцiи къ приращенiю h независимаго перемѣннаго x.

3) Найти предѣлъ послѣдняго отношенiя, полагая, что h стремится къ 0.

На эти три ступени обращаемъ особое вниманiе читателя.

Примѣръ. Найти производную функцiи:

$$y=F(x)=3x^2+5.$$

Первая ступень. Опредѣляемъ **приращенiе функцiи,** соотвѣтствующее приращенiю h независимаго перемѣннаго x:

$$F(x+h)\quad 3(x+h)^2+5$$
$$F(x)\quad 3x^2+5$$
$$F(x+h)-F(x)=3(x+h)^2+5-(3x^2+5)=6xh+3h^2.$$

Итакъ, приращенiе функцiи равно:

$$6xh+3h^2.$$

Вторая ступень. Опредѣляемъ отношенiе приращенiя функцiи къ приращенiю независимаго перемѣннаго:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{6xh+3h^2}{h}=6x+3h.$$

Третья ступень. Находимъ предѣлъ послѣдняго отношенiя, когда h стремится къ o:

$$\text{пр.}(6x+3h)_{h\to o}=6x$$

Слѣдовательно: $F'(x)=6x.$

Нѣкоторыя существенныя замѣчанія о производной.

47. a) При разысканіи производной всегда предполагается, что перемѣнная h измѣняется **непрерывно.**

b) Безконечно-малое приращеніе h можетъ быть какъ положительнымъ, такъ и отрицательнымъ и предѣлъ отношенія:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

не долженъ зависѣть отъ знака h.

c) Бываютъ однако случаи, когда можно разыскивать производную только при положительномъ или только при отриц. значеніи h. Напримѣръ, отыскивая производную функціи $y=\sqrt{x}$ при $x=0$, нельзя считать h отриц., ибо y при отрицательныхъ значеніяхъ x не существуетъ.

d) **Теорема. Если f (x) при $x=a$ имѣетъ конечную производную f′ (a), то f (x) непрерывна при $x=a$.**

Дѣйствительно, изъ условія:

$$\text{пр.}\ \frac{f(a+h)-f(a)}{h}_{h\to 0}=f'(a)$$

слѣдуетъ:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)+\alpha,$$

гдѣ, при h без. мел., α тоже безк.-малое число.

Отсюда:

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a)+h\alpha.$$

При h безконечно-маломъ оба члена второй части безконечно-малы; слѣдовательно:

$$f(a+h)-f(a)=\text{б.м.ч.},$$

а потому f(x) непрерывна при:

$$x=a.$$

Изъ доказанной теоремы слѣдуетъ, что непрерывность f(x), при $x=a$, составляетъ **необходимое условіе** существованія производной ея при $x=a$. Слѣдовательно, не можетъ быть и рѣчи о разысканіи производной функціи:

$$y=\frac{1}{x-2}$$

при $x=2$, ибо при этомъ значеніи x функція разрывается.

e) Непрерывность функціи составляетъ условіе необходимое для существованія ея производной, но **недостаточное,** т.-е., говоря иначе, функція можетъ быть непрерывна при данномъ значеніи x и всетаки не имѣть производной при этомъ значеніи x.

Вотъ примѣръ: функція, опредѣляемая условіями:

$$\left.\begin{array}{ll} F(x)=x\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{x}, & \text{при } x\neq o \\ F(x)=o & \text{при } x=o^{*)} \end{array}\right|$$

непрерывна при x=o,
ибо:

$$\left|h\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{h}-0\right|\leqslant|h|,$$

а отношеніе приращенія функціи къ приращенію независимаго перемѣннаго:

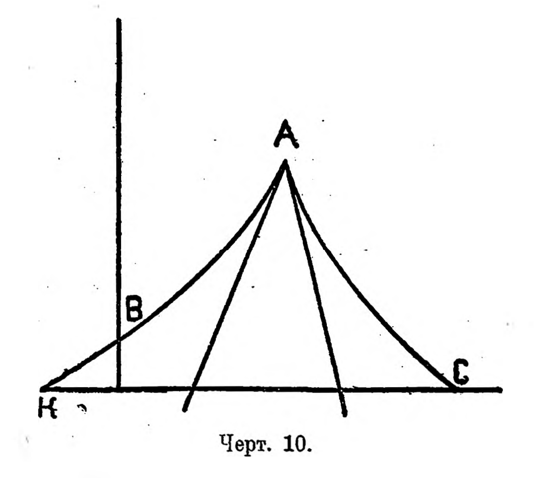
$$\frac{F(h)-F(o)}{h}=\frac{h\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{h}-0}{h}=\mathrm{Sin}\,\frac{1}{h},$$

при приближеніи h къ нулю, не стремится ни къ какому предѣлу и колеблется между -1 и $+1$.

Вейерштрасъ показалъ, что существуютъ непрерывныя при всѣхъ значеніяхъ x функціи, не имѣющія производной ни при какомъ значеніи x.

48. Если отношеніе $\frac{F(a+h)-F(a)}{h}$ при безграничномъ приближеніи h къ 0 не стремится ни къ какому опредѣленному предѣлу, какъ это имѣло мѣсто въ предыдущемъ примѣрѣ, то говорятъ, что **производная** F(x) при $x=a$ **не существуетъ.**

49. Обыкновенно кривая имѣетъ одну опредѣленную касательную въ данной точкѣ, и **производная не зависитъ отъ того закона, по которому h подводится къ нулю.** Но могутъ быть исключенія,—напримѣръ, для кривой BAC въ точкѣ A (черт. 10) существуютъ двѣ касательныя: одна получается когда h подходитъ къ 0, оставаясь положительнымъ, а другая, когда h подходитъ къ 0, оставаясь отрицательнымъ.



Черт. 10.

50. Если при безграничномъ приближеніи h къ нулю отношеніе:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

безгранично возрастаетъ по абс. величинѣ, то **условно говорятъ: производная равна** $\pm\infty$, въ зависимости отъ того или другого постояннаго знака отношенія.

---

*) Функція $x\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{x}$ не опредѣлена при $x=o$, и потому введено дополнительное условіе $F(o)=o$.

51. Отъ производной функцiи $y'=f'(x)$ **можно искать новую производную,** которую обозначаютъ такъ:

$$y''=f''(x)$$

Она называется второй производной по отношенiю къ $f(x)$. Производная второй производной:

$$y'''=f'''(x)$$

называется **третьей производной по отношенiю къ** $f(x)$ и т. д. $f(x)$ **по отношенiю къ своей производной** $f'(x)$ **называется первообразной;** первообразная относительно y'' есть y' и т. д.

Механическое значенiе производной.

52. Если нѣкоторая точка A движется по прямой OA постоянно въ одномъ и томъ же направленiи, то движенiе ея будетъ вполнѣ опредѣлено aаданiемъ разстоянiя ея отъ постоянной точки O на прямой OA. Разстоянiе это есть функцiя времени t (отсчитываемаго отъ опредѣленнаго момента, называемаго «началомъ временъ»), такъ, что:

$$OA=f(t).$$

При этихъ условiяхъ составимъ себѣ понятiе о скорости точки A въ моментъ времени t *).

Если точка A движется равномѣрно, то, какъ извѣстно, скорость ея V опредѣляется «отношенiемъ пространства, пройденнаго въ какой-нибудь промежутокъ времени къ этому промежутку времени». Найдемъ, пространство, пройденное точкою A въ теченiе τ секундъ послѣ момента t, и затѣмъ, **предполагая движенiе равномѣрнымъ,** соотвѣтствующую скорость V. Если точка A въ моментъ $t+\tau$ заняла положенiе A_1, то ясно, что:

$$OA_1=f(t+\tau);$$
$$AA_1=f(t+\tau)-f(\tau);$$
$$V=\frac{f(t+\tau)-f(t)}{\tau}.$$

---

*) т.-е. въ моментъ, наступившiй спустя t секундъ отъ начала временъ.

Если бы точка A двигалась равномѣрно, то V было бы числомъ постояннымъ, не зависящимъ ни отъ t ни отъ τ *).

Но такъ какъ точка A движется не равномѣрно, то отношенiе:

$$\frac{f(t+\tau)-f(t)}{\tau}.$$

измѣняется въ зависимости отъ t и τ **) и носитъ названiе **средней скорости** на пространствѣ AA_1, пройденномъ въ теченiе τ секундъ послѣ момента t. Это будетъ средняя скорость для каждой точки пути AA_1, а слѣдовательно и для точки A. Ясно при этомъ, что чѣмъ меньше будетъ AA_1, т.-е. чѣмъ меньше будетъ τ, тѣмъ болѣе средняя скорость:

$$\frac{f(t+\tau)-f(t)}{\tau}$$

будетъ характеризовать скорость точки A въ моментъ t.

Поэтому скорость v неравномѣрнаго движенiя, соотвѣтствующая моменту времени t, **опредѣляется, какъ предѣлъ средней скорости**, **когда τ стремится къ 0**, т.-е.

$$v = \text{пред.}\ \frac{f(t+\tau)-f(t)}{\tau}\ {}_{\tau\to 0}.$$

Слѣдовательно, скорость неравномѣрнаго движенiя **опредѣляется** какъ **производная отъ функцiи, выражающей «законъ разстоянiй»** [f(t)] **въ зависимости отъ времени:**

$$v = f'(t).$$

Напримѣръ, если $s=t^2$, то:

$$v=2t \quad (\S\ 45\ ).$$

Это опредѣленiе скорости распространяется и на случай криволинейной траекторiи, при чемъ движущаяся точка можетъ измѣнять направленiе движенiя.

---

*) При равномѣрномъ движенiи:

$$f(t)=at$$

и $$\frac{f(t+\tau)-f(t)}{\tau}=a.$$

**) Если $f(t)=t^2$, то:

$$\frac{f(t+\tau)-f(t)}{\tau}=2t\tau+\tau.$$

Разысканіе производныхъ простѣйшихъ функцій.

53. Производная постояннаго числа C равна 0.

Дѣйствительно, такъ какъ C не измѣняется при измѣненіи x, то:

$$f(x+h)=C$$
$$f(x)=C$$
$$f(x+h)-f(x)=0$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$$

и $$\text{пр.}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}_{h\to o}=f'(x)=0.$$

54. Производная независимаго перемѣннаго равна 1, т.-е. $(x)'=1$.

Дѣйствительно:

$$f(x+h)=x+h$$
$$f(x)=x$$
$$f(x+h)-f(x)=h$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h}{h}=1$$
$$\text{пред.}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}_{h\to o}=1$$

т.-е. $(x)'=1$.

55. $(X^n)'=nX^{n-1}$ при n цѣломъ и положительномъ.

Дѣйствительно:

$$f(x+h)=(x+h)^n$$
$$f(x)=x^n$$
$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^n-x^n$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\frac{(x+h)^n-x^n}{(x+h)-x}=(x+h)^{n-1}+x(x+h)^{n-2}+\ldots+x^{n-1}.$$

Поэтому:

$$\text{пр.}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}_{h\to o}=\text{пр.}\left\{(x+h)^{n-1}+x(x+h)^{n-2}+\ldots\ldots+x^{n-1}\right\}_{h\to o}$$

Но предѣлъ суммы равенъ суммѣ предѣловъ, а предѣлъ одного изъ слагаемыхъ, напримѣръ, $x^2(x+h)^{n-3}$, опредѣляется такъ:

$$\text{пр.}\ x^2(x+h)^{n-3}_{h\to o}=x^2\ \text{пр.}\ (x+h)^{n-3}_{h\to o}=x^2\left\{\text{пр.}\ (x+h)_{h\to o}\right\}^{n-3}=x^{n-1}.$$

Таковъ же будетъ предѣлъ и каждаго изъ остальныхъ n слагаемыхъ.

Поэтому: $$f'(x)=(x^n)'=nx^{n-1}.$$

Впослѣдствіи мы убѣдимся, что эта формула справедлива при всякомъ значеніи показателя n.

56. $(\mathrm{Sin}\ x)' = \mathrm{Cos}\ x.$

Дѣйствительно:

$$f(x+h) = \mathrm{Sin}(x+h)$$
$$f(x) = \mathrm{Sin}\,x$$
$$f(x+h) - f(x) = \mathrm{Sin}(x+h) - \mathrm{Sin}\,x$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\mathrm{Sin}(x+h) - \mathrm{Sin}\,x}{h} = \frac{2\,\mathrm{Sin}\frac{h}{2}\,\mathrm{Cos}\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.\ \mathrm{Cos}\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

Поэтому: $$\text{пр.}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \underset{h\to o}{\text{пр.}}\left\{\frac{\mathrm{Sin}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right\}.\ \underset{h\to o}{\text{пр.}}\ \mathrm{Cos}\left(x+\frac{h}{2}\right) \underset{h\to o}{=}$$
$$= \mathrm{Cos}\,x,$$

ибо, на основаніи § 17, предѣлъ перваго множителя равенъ 1.

57. $(\mathrm{Cos}\ x)' = -\mathrm{Sin}\ x.$

Дѣйствительно:

$$f(x+h) = \mathrm{Cos}(x+h)$$
$$f(x) = \mathrm{Cos}\,x$$
$$f(x+h) - f(x) = \mathrm{Cos}(x+h) - \mathrm{Cos}\,x.$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\mathrm{Cos}(x+h) - \mathrm{Cos}\,x}{h} = -\frac{2\,\mathrm{Sin}\frac{h}{2}\,\mathrm{Sin}\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= -\frac{\mathrm{Sin}\frac{h}{2}}{\left(\frac{h}{2}\right)}.\ \mathrm{Sin}\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Поэтому:

$$\text{пр.}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}_{h\to o} = -\text{пр.}\left\{\frac{\mathrm{Sin}\frac{h}{2}}{\left(\frac{h}{2}\right)}\right\}_{h\to o}.\ \text{пр.}\ \mathrm{Sin}\left(x+\frac{h}{2}\right) \underset{h\to o}{=} -\mathrm{Sin}\,x.$$

58. $(\lg_a x)' = \frac{\lg_a e}{x}$

Дѣйствительно:

$$f(x+h) = \lg_a(x+h)$$
$$f(x) = \lg_a x$$
$$f(x+h) - f(x) = \lg_a(x+h) - \lg_a x = \lg_a\frac{x+h}{x} = \lg_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\lg_a\left(1+\frac{h}{x}\right)=\frac{1}{x}\lg_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$\text{пр.}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}_{h\to o}=\frac{1}{x}\cdot\text{пр.}\lg_a\left\{1+\frac{h}{x}\right\}^{\frac{x}{h}}_{h\to o}=\frac{1}{x}\lg_a\text{ пр.}\left\{1+\frac{h}{x}\right\}^{\frac{x}{h}}_{h\to o}$$

Но:

$$\text{пр.}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}_{h\to o}=e.$$

Дѣйствительно, полагая:

$$\frac{h}{x}=\frac{1}{n},$$

гдѣ, при безконечно-маломъ h, n безконечно-велико, получимъ:

$$\text{пр.}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}_{h\to o}=\text{пр.}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}_{n\to\infty}=e.$$

Слѣдовательно, окончательно:

$$\left(\lg_a x\right)'=\frac{\lg_a e}{x}.$$

Если a=e, то:

$$\left(\lg_e x\right)'=\frac{1}{x}.$$

Общія теоремы, касающіяся разысканія производной.

59. При изложеніи всѣхъ послѣдующихъ теоремъ предполагается, что всѣ входящія въ нихъ функціи въ разсматриваемой области непрерывны и имѣютъ производныя.

60. Производная произведенія постояннаго числа на функцію равна постоянному числу, умноженному на производную отъ функціи.

Дѣйствительно:

$$\left[AF(x)\right]'=\text{пр.}\frac{AF(x+h)-AF(x)}{h}_{h\to o}=A\text{ пр.}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}_{h\to o}=AF'(x)$$

Примѣръ. $(3\operatorname{Sin}x)'=3(\operatorname{Sin}x)'=3\operatorname{Cos}x$

61. Производная алгебраической суммы нѣсколькихъ функцій равна алгебраической суммѣ производныхъ отъ тѣхъ же функцій:

Дѣйствительно:

$$\left[f(x)+\varphi(x)\right]'=\text{пр.}\frac{f(x+h)+\varphi(x+h)-f(x)-\varphi(x)}{h}_{h\to o}=$$

$$=\text{пр.}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}_{h\to o}+\text{пр.}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}_{h\to o}=f'(x)+\varphi'(x).$$

Примѣръ.

$$(3x^2+2x^5+4\,\mathrm{Sin}x)'=(3x^2)'+(2x^5)'+(4\,\mathrm{Sin}x)'=$$
$$=3\,(x^2)'+2\,(x^5)'+4\,(\mathrm{Sin}x)'=6x+10x^4+4\,\mathrm{Cos}x.$$

62. Изъ этой теоремы слѣдуетъ, **что если мы имѣемъ двѣ функціи**

$$f(x) \text{ и } f(x)+C,$$

которыя разнятся только постояннымъ числомъ C, то производныя ихъ равны. Дѣйствительно:

$$[f(x)+c]'=f'(x).$$

Значитъ, **не однѣ только равныя функціи имѣютъ равныя производныя, но и такія, которыя отличаются другъ отъ друга постояннымъ слагаемымъ.** При такихъ условіяхъ возникаетъ вопросъ о томъ, не существуетъ ли еще какого-либо иного рода функцій, имѣющихъ равныя производныя? Мы отвѣтимъ на этотъ вопросъ впослѣдствіи.

63. Производная произведенія двухъ функцій $f(x)\ \varphi(x)$ равна суммѣ произведеній одной изъ функцій на производную другой т.-е.:

$$(f(x)\,\varphi(x)]'=f'(x)\,\varphi(x)+\varphi'(x)\,f(x).$$

Дѣйствительно: $\text{пр.}_{h\to o}\ \dfrac{f(x+h)\,\varphi(x+h)-f(x)\,\varphi(x)}{h}=$

$$=\text{пр.}_{h\to o}\frac{f(x+h)\,\varphi(x+h)-f(x)\,\varphi(x+h)+f(x)\,\varphi(x+h)-f(x)\,\varphi(x)}{h}=$$

$$=\text{пр.}_{h\to o}\frac{\varphi(x+h)\,[f(x+h)-f(x)]}{h}+\text{пр.}_{h\to o}\frac{f(x)\,[\varphi(x+h)-\varphi(x)]}{h}=$$

$$=\text{пр.}_{h\to o}\,\varphi(x+h).\ \text{пр.}_{h\to o}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+f(x)\,\text{пр.}_{h\to o}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=$$

$$=f'(x)\,\varphi(x)+\varphi'(x).\,f(x),$$ ч. и т. д.

Примѣръ.

$$(4x^3\,\mathrm{Sin}\,x)'=(4x^3)'\,\mathrm{Sin}\,x+(\mathrm{Sin}\,x)'\,4x^3=$$
$$=12x^2\ \mathrm{Sin}\,x+4x^3\ \mathrm{Cos}\,x.$$

64. Производная дроби $\Phi(x)=\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ равна разности между произведеніемъ производной числителя на знаменатель и производной знаменателя на числитель, раздѣленной на квадратъ знаменателя, т.-е.:

$$\Phi'(x)=\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)'=\frac{f'(x)\,\varphi(x)-\varphi'(x)\,f(x)}{[\varphi(x)]^2}$$

Дѣйствительно:

$$\Phi(x)\,.\,\varphi(x)=f(x)$$

и потому:

$$\Phi'(x) \,.\, \varphi(x) + \Phi(x)\,\varphi'(x)\,. = f'(x)$$

отсюда:

$$\Phi'(x) = \frac{f'(x)\,.\,\varphi(x) - \varphi'(x)\,.\,f(x).}{[\varphi(x)]^2}$$

Конечно, здѣсь предполагается, что $\varphi(x) \neq o$ для тѣхъ значенiй x, при которыхъ разыскивается производная Φ (x).

Примѣры:

1) $$\left(\frac{x^2-5x+1}{x^3+1}\right)' = \frac{(x^2-5x+1)'(x^3+1) - (x^3+1)'.(x^2-5x+1)}{(x^3+1)^2} =$$

$$= -\frac{x^4-10x^3+3x^2-2x+5}{(x^3+1)^2}$$

2) $$\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = \frac{(1)'f(x) - f'(x).1}{[f(x)]^2} = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}.$$

65. Примѣнимъ теорему о производной дроби къ разысканiю производной tgx и Cotgx:

$$\left(\mathbf{tgx}\right)' = \left(\frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x}\right)' = \frac{\operatorname{Cos}^2 x = \operatorname{Sin}^2 x}{\operatorname{Cos}^2 x} = \frac{1}{\mathbf{Cos^2 x}}.$$

$$\left(\mathbf{Cotgx}\right)' = \frac{\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x} = \frac{-\operatorname{Sin}^2 x - \operatorname{Cos}^2 x}{\operatorname{Sin}^2 x} = -\frac{1}{\mathbf{Sin^2 x}}.$$

Производная сложной функцiи.

66. При разысканiи производной могутъ встрѣтиться случаи, когда данная функцiя выражена въ зависимости отъ нѣкоторой другой функцiи x.

Напримѣръ:

$$\varphi(x) = \operatorname{Sin}\, y \text{ при условiи, что } y = \log_e x.$$

Функцiи подобнаго рода называются сложными, и является вопросъ, какъ вычислять производныя подобныхъ функцiй. Отвѣтимъ на этотъ вопросъ.

Пусть намъ задана:

$$\Phi(y)$$

при условiи, что:

$$y = f(x),$$

и мы желаемъ найти производную $\Phi(y)$ по x, которую обозначимъ черезъ $\Phi'_x(y)$.

Оговоримся предварительно, что мы предполагаемъ существованіе производныхъ $\Phi'_y(y)$ и $f'(x)$ для разсматриваемыхъ значеній y и x.

На основаніи опредѣленія производной:

$$\Phi'_x(y) = \text{пр.} \frac{\Phi[f(x+h)] - \Phi[f(x)]}{h}_{h \to 0} \text{ или,}$$

обозначая: $f(x)$ — черезъ y и $f(x+h)$ — черезъ y_1:

$$\Phi_x'(y) = \text{пр.} \left[\frac{\Phi(y_1) - \Phi(y)}{y_1 - y} \cdot \frac{y_1 - y}{h}\right]^{*)}_{h \to 0} =$$

$$= \text{пр.} \frac{\Phi(y_1) - \Phi(y)}{y_1 - y}_{h \to 0} \cdot \text{пр.} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}_{h \to 0}.$$

Вникнемъ въ смыслъ второй части этого равенства: второй множитель его, очевидно, представляетъ производную $f(x)$, т.-е. $f'(x)$, но что представляетъ собою первый множитель?

Можно ли сказать, что онъ представляетъ собою производную $\Phi(y)$ по y, разсматривая y какъ независимое перемѣнное?

Да, и вотъ почему.

Когда h стремится къ 0, то:

$$y_1 - y = f(x+h) - f(x)$$

тоже стремится къ 0, [ибо $f(x)$ непрерывна при разсматриваемыхъ значеніяхъ x]. Съ другой стороны, мы знаемъ, что производная вообще не зависитъ отъ того закона, по которому независимая перемѣнная стремится къ нулю и поэтому:

$$\text{пр.} \frac{\Phi(y_1) - \Phi(y)}{y_1 - y}_{h \to 0} = \text{пр.} \frac{\Phi(y_1) - \Phi(y)}{y_1 - y}_{(y_1 - y) \to 0} = \Phi'_y(y).$$

и потому окончательно:

$$\Phi'_x(y) = \Phi'_y(y) \cdot f'_x(x)$$

Итакъ, оказывается, что производная Ф (y) по независимой перемѣнной x равна произведенію производной Ф (y) по независимой перемѣнной y, на производную другой функціи f (x) по независимой перемѣнной x.

Обратимся теперь къ тому примѣру, который мы задали себѣ раньше:

$$\Phi(y) = \operatorname{Sin} y$$
$$y = \lg_e x.$$

*) Мы полагаемъ, что $y_1 \neq y$. Случай $y_1 = y$ требуетъ особаго изслѣдованія.

На основанiи предыдущей теоремы:

$$\Phi'_x(y)=\Phi'_y(y)\cdot y'_x = \mathrm{Cos} y.\ \frac{1}{x}=\frac{\mathrm{Cos} \lg_e x}{x}.$$

67. Доказанная теорема чрезвычайно расширяетъ поле разысканiя производныхъ, ибо примѣняется къ каждой изъ выведенныхъ нами ранѣе формулъ для производныхъ, если въ нихъ независимое перемѣнное замѣнить его функцiей p.

Такъ, напримѣръ:

$$\left(\lg_e p\right)'=\frac{p'}{p}$$

$$\left(\mathrm{Sin}\, p\right)'=p'\mathrm{Cos}\, p$$

$$(p^n)'=np^{n-p}p' \text{ (при n цѣломъ).}$$

Примѣръ.

$$\left[(\mathrm{Sin}\, 2x^2)^3\right]'=3(\mathrm{Sin}\, 2x^2)^2\ (\mathrm{Sin}\, 2x^2)' = 3(\mathrm{Sin}\, 2x^2)^2 . \mathrm{Cos}\, 2x^2 . (2x^2)' =$$
$$=3. (\mathrm{Sin}\, 2x^2)^2 . \mathrm{Cos}\, 2x^2 . 4x= 12x\ \mathrm{Sin}^2 2x^2 \mathrm{Cos} 2x^2.$$

68. Иногда x и y задаютъ, какъ нѣкоторыя функцiи третьяго перемѣннаго t:

$$x=\varphi(t);\ y=\psi(t)$$

и требуютъ найти производную y по x.

Этотъ вопросъ рѣшается на основанiи предыдущей теоремы. Такъ какъ x есть функцiя t, то обратно и t есть функцiя x, и потому y является сложной функцiей относительно x. Слѣдовательно, на основанiи теоремы о производной сложной функцiи, имѣемъ:

$$y'_x=y'_t\, .\, t'_x.$$

Съ другой стороны, беря производныя по x отъ обѣихъ частей равенства $x=\varphi(t)$ и разсматривая и здѣсь t какъ функцiю x получимъ:

$$1=\varphi'_t(t)\, .\, t'_x.$$

Поэтому окончательно:

$$y'_x=\frac{y'_t}{\varphi'_t(t)}=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Примѣръ.

$$x=r(t-\mathrm{Sin} t)$$
$$y=r(1-\mathrm{Cos} t)$$
$$y'_x=\mathrm{Cot}\frac{t}{2}.$$

Производная X^n.

69. Выведемъ теперь, пользуясь доказанными теоремами, производную функціи x^n при отрицательныхъ и дробныхъ значеніяхъ n.

a) $n = -k$, гдѣ k цѣлое полож. ч. Тогда:

$$y = x^n = x^{-k} = \frac{1}{x^k}$$

Примѣняя теорему о производной дроби, получимъ:

$$y' = -\frac{\left(x^k\right)'}{\left(x^k\right)^2} = -\frac{kx^{k-1}}{x^{2k}} = -kx^{-k-1} = nx^{n-1}.$$

b) $n = \frac{p}{q}$, гдѣ p и q какія угодно цѣлыя числа (положительныя или отрицательныя). Тогда:

$$y = x^n = x^{\frac{p}{q}}.$$

Отсюда: $$y^q = x^p$$

Такъ какъ двѣ функціи y^q и x^p равны между собою, то и производныя ихъ тоже равны, т.-е.:

$$\left(y^q\right)' = \left(x^p\right)'$$

Но y есть сложная функція отъ x, поэтому:

$$qy^{q-1} \cdot y' = px^{p-1}$$

Отсюда:

$$y' = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} = nx^{n-1}$$

Значитъ, послѣдняя формула справедлива при всѣхъ соизмѣримыхъ значеніяхъ n.

Въ частности, если:

$$y = \sqrt[n]{x},$$ гдѣ n цѣлое пол. число,

то: $$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Производная a^x.

70. Считая a числомъ положительнымъ и не равнымъ 1, найдемъ производную функціи:

$$y = a^x$$

и съ этою цѣлью прологариѳмируемъ послѣднее равенство по основанію е:

$$\lg_e y = x \lg_e a.$$

Беря производныя отъ обѣихъ частей послѣдняго равенства, получимъ:

$$\frac{y'}{y} = \lg_e a.$$

Отсюда:

$$y' = a^x \lg_e a.$$

Если $a = e$, то:

$$(e^x)' = e^x.$$

Если въ показателѣ вмѣсто x была бы нѣкоторая функція p отъ x, то, на основаніи § 60, имѣли бы:

$$y' = (a^p)' = a^p \lg_e a \,.\, p'.$$

Примѣръ.

$$(2^{\sin 2x})' = 2^{\sin 2x} \lg_e 2 \,.\, \cos 2x \,.\, 2 = 2^{\sin 2x + 1} \cos 2x \,.\, \lg_e 2.$$

Круговыя функціи и ихъ производныя.

arcsin x и его производная.

71. Если

$$y = \sin x$$

то, какъ было объяснено въ § 26, x есть тоже нѣкоторая функція y, обратная по отношенію къ Sin x. Эту функцію обозначаютъ черезъ:

$$\arcsin y$$

и читаютъ такъ: арксинусъ y.

Каково же значеніе arcsin x? *)

arcsin x означаетъ собой дугу **), синусъ которой есть x.

Поэтому:

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2};\ \arcsin 0 = 0;\ \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Но очевидно, что эти значенія arcsin x не единственныя. Такъ въ послѣднемъ примѣрѣ $\arcsin \frac{1}{2}$ равенъ не только $\frac{\pi}{6}$, но и $\frac{5\pi}{6}$, и $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, и $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, гдѣ k произвольное цѣлое число.

---

*) Мы замѣняемъ здѣсь букву y буквой x, по аналогіи съ другими формулами.

**) Мы выражаемся такъ для краткости, понимая подъ дугой соотвѣтствующее ей отвлеченное число (см. далѣе).

Слѣдовательно, arcsin x, при данномъ x, имѣетъ безчисленное множество значеній. Поэтому, для устраненія многозначности arcsin x, условились разсматривать только тѣ значенія его, которыя заключаются въ предѣлахъ отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. При такихъ условіяхъ, каково бы ни было значеніе x, заключенное между -1 и $+1$, ему всегда будетъ отвѣчать единственное значеніе arcsin x.

Напримѣръ:

$$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6};\ \arcsin 1=\frac{\pi}{2}$$

и пр.

Найдемъ производную функціи: $y=\arcsin x$

По опредѣленію функціи:

$$x=\operatorname{Sin} y$$

Поэтому:

$$(x)'=(\operatorname{Sin} y)'$$

или:

$$1=\operatorname{Cos} y\cdot y'$$

Отсюда:

$$y'=\frac{1}{\operatorname{Cos} y}$$

Но, такъ какъ $\operatorname{Sin} y=x$ то:

$$\operatorname{Cos} y=\sqrt{1-x^2}$$

и поэтому:

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Какой знакъ брать передъ радикаломъ?

Такъ какъ y заключено въ предѣлахъ $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, а въ этихъ предѣлахъ Cos y всегда положителенъ, то передъ радикаломъ слѣдуетъ ставить знакъ +. И окончательно:

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{+\sqrt{1-x^2}}.$$

Для arcsin p, гдѣ p есть функція отъ x, имѣемъ:

$$(\arcsin p)'=\frac{p'}{+\sqrt{1-p^2}}.$$

arccos x и его производная.

72. arccos x (арккосинусъ x) обозначаетъ собою дугу, косинусъ которой равенъ x. Это—функція обратная Cos x. Для устраненія многозначности ея условились разсматривать только тѣ значенія arccos x, которыя заключаются въ предѣлахъ отъ 0 до π. При такихъ условіяхъ любому значенію x, заключенному въ предѣлахъ отъ —1 до +1, соотвѣтствуетъ единственное значеніе arccos x, заключенное въ предѣлахъ отъ 0 до π.

Найдемъ производную arc cos x:

$$y = \arccos x$$
$$x = \operatorname{Cos} y$$
$$(x)' = (\operatorname{Cos} y)'$$
$$1 = -\operatorname{Sin} y \cdot y'$$
$$y' = -\frac{1}{\operatorname{Sin} y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Слѣдовательно: $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Передъ радикаломъ надо ставить знакъ +, потому что y заключается въ предѣлахъ $(0, \pi)$

Если p есть функція отъ x, то: $(\arccos p)' = -\frac{p'}{\sqrt{1-p^2}}$

arctg x и его производная.

73. arctg x (арктангенсъ x) обозначаетъ собою единственную дугу, заключенную въ предѣлахъ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тангенсъ которой равенъ x. Это—функція обратная tg x; аргументъ ея измѣняется въ предѣлахъ отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Найдемъ производную arctg x:

$$y = \operatorname{arctg} x$$
$$x = \operatorname{tg} y.$$
$$(x)' = (\operatorname{tg} y)';$$
$$1 = \frac{y'}{\operatorname{Cos}^2 y};$$
$$y' = \operatorname{Cos}^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2};$$

Слѣдовательно: $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Если p есть функція отъ x, то: $(\operatorname{arctg} p)' = \frac{p'}{1+p^2}$

arccotg x и его производная.

74. arccotg x (арккотангенсъ x) обозначаетъ собою единственную дугу, заключенную въ предѣлахъ $(0, \pi)$, котангенсъ которой

равенъ x. Это—функція обратная $\operatorname{Cotg} x$; аргументъ ея x измѣняется въ предѣлахъ отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Найдемъ производную $\operatorname{arccotg} x$:

$$y = \operatorname{arccotg} x;$$
$$x = \operatorname{cotg} y;$$
$$(x)' = (\operatorname{Cotg} y)'$$
$$1 = -\frac{y'}{\operatorname{Sin}^2 y};$$
$$y' = -\operatorname{Sin}^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{Cot}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Слѣдовательно: $$(\operatorname{arc} \operatorname{Cotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

а въ случаѣ, когда p есть функція отъ x:

$$(\operatorname{arc} \operatorname{Cotg} p)' = -\frac{p'}{1+p^2}.$$

75.. Таблица основныхъ формулъ (p и q функціи x).

$$\left(C\right)' = o;$$ C—постоянное

$$\left(x\right)' = 1;$$

$$\left(p \pm q\right)' = p' \pm q';$$

$$\left(ap\right)' = ap';$$

$$\left(pq\right)' = p'q + q'p;$$

$$\left(p^n\right)' = np^{n-1}p';$$

$$\left(\frac{p}{a}\right)' = \frac{p'}{a},$$

$$\left(\frac{a}{p}\right)' = -\frac{ap'}{p^2};$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)' = \frac{p'q - q'p}{p^2};$$

$$\left(\sqrt{p}\right)' = \frac{p'}{2\sqrt{p}};$$

$$\left(\sqrt[n]{p}\right)' = \frac{p'}{n\sqrt[n]{p^{n-1}}};$$

$$\left(\lg_e p\right)' = \frac{p'}{p};$$

$$\left(\lg_a p\right)' = \frac{p' \lg_a e}{p};$$

$$\left(a^p\right)' = a^p p' \lg_e a;$$

$$\left(\operatorname{Sin} p\right)' = \operatorname{Cos} p \,.\, p';$$

$$\left(\operatorname{Cos} p\right)' = -\operatorname{Sin} p \,.\, p';$$

$$\left(\operatorname{tg} p\right)' = \frac{p'}{\operatorname{Cos}^2 p};$$

$$\left(\operatorname{Cotg} p\right)' = -\frac{p'}{\operatorname{Sin}^2 p};$$

$$\left(\operatorname{arc} \operatorname{Sin} p\right)' = \frac{p'}{\sqrt{1-p^2}};$$

$$\left(\operatorname{arc} \operatorname{Cos} p\right)' = -\frac{p'}{\sqrt{1-p^2}};$$

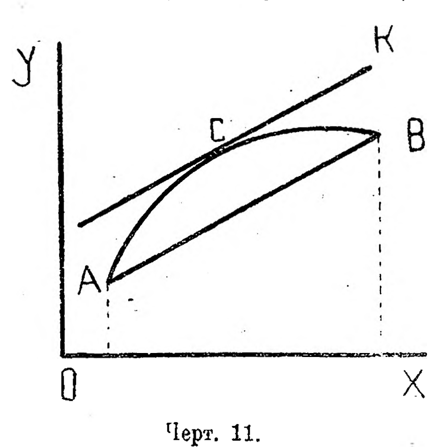
$$\left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} p\right)' = \frac{p'}{1+p^2};$$

$$\left(\operatorname{arc} \operatorname{cotg} p\right)' = -\frac{p'}{1+p^2}.$$

Изслѣдованіе измѣненій функцій.

76. Изслѣдованіе измѣненій функцій основывается на слѣдующей леммѣ, извѣстной подъ именемъ **теоремы Лагранжа**.

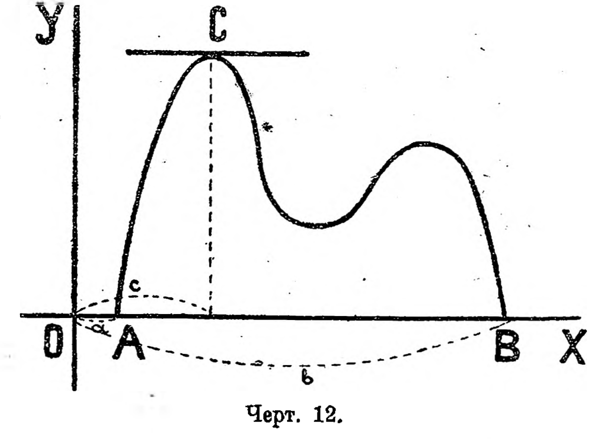
Дана дуга ACB (черт. 11) и стягивающая ее хорда AB. Дуга эта непрерывна*) и въ каждой точкѣ имѣетъ единственную касательную. Требуется доказать, что существуетъ такая касательная CK, къ дугѣ ACB, которая параллельна хордѣ AB.



Черт. 11.

Вникнемъ прежде всего въ условія теоремы. Подъ непрерывной дугой слѣдуетъ понимать такую, на которой нѣтъ разрывовъ; затѣмъ предполагается, что въ каждой точкѣ дуги существуетъ единственная касательная. Поэтому теорема Лагранжа непримѣнима, напримѣръ, къ дугѣ KAC, (нрт. 10), обладающіе въ точкѣ A двумя касательными. Иными словами—условія теоремы требуютъ, чтобы f (x), выражающая данную кривую, была непрерывна въ области разсматриваемой дуги и, сверхъ того, имѣла для каждаго значенія x въ данномъ интервалѣ **) единственную производную ***).

Доказательство теоремы раздѣлимъ **на двѣ части: въ первой** разсмотримъ тотъ частный случай, когда **хордой служитъ часть оси абсциссъ**, а **во второй** будемъ разсматривать **какую угодно хорду.**



Черт. 12.

a) Разсматривается дуга ACB и соотвѣтствующая ей хорда AB (черт. 12).

$$OA = a;\ OB = b.$$

Уравненіе кривой ACB:

$$y = f(x).$$

По условію теоремы:

$$f(a) = f(b) = 0.$$

---

*) Сплошна

**) Опредѣляемомъ дугою.

***) Если f (x) имѣетъ въ данной области единственную для каждаго значенія x производную, то она непрерывна въ этой области. Такъ что изъ 2-го условія вытекаетъ 1-ое.

Требуется доказать, что существуетъ такая касательная къ дугѣ АСВ, которая параллельна хордѣ АВ. Такъ какъ угловой коэффиціентъ касательной равенъ $f'(x)$, то доказательство теоремы сводится къ слѣдующему: **надо доказать, что существуетъ такое значеніе с независимаго перемѣннаго x, промежуточное между a и b, при которомъ:**

$$f'(c)=0.$$

Для доказательства разсмотримъ измѣненіе $f(x)$ въ интервалѣ (a, b):

Намъ дано, что: $f(a)=0$;

если бы и далѣе во всемъ интервалѣ (a, b):

$$f(x)=0,$$

то дуга АСВ совпала бы съ своею хордою АВ, и тогда для каждой точки интервала имѣло бы мѣсто равенство:

$$f'(x)=0.$$

Слѣдовательно, **въ этомъ частномъ предположеніи теорема доказана**.

Разсмотримъ теперь **другое предположеніе: когда x больше** a, **то функція f (x) сначала увеличивается.** Тутъ прежде всего отмѣтимъ, что это увеличеніе функціи не можетъ распространяться на всю область АВ, ибо:

$$f(b)=0.$$

Слѣдовательно, $f(x)$, увеличиваясь до нѣкотораго $x=c$, промежуточнаго между a и b, затѣмъ начнетъ уменьшаться и, измѣняясь далѣе какимъ-нибудь образомъ, опять достигнетъ 0 при $x=b$.

Для насъ **важно значеніе функціи при x=c**. По вышесказанному, оно больше смежныхъ съ нимъ значеній, какъ ему предшествующихъ, такъ и ему послѣдующихъ; другими словами, при достаточно маломъ положительномъ h:

$$f(c+h)-f(c)<0$$
$$f(c-h)-f(c)<0.$$

Отсюда:

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}<0$$

$$\frac{f(c-h)-f(c)}{-h}>0$$

Обѣ эти дроби, изъ которыхъ одна отрицательна а другая положительна, стремятся къ одному и тому же предѣлу f' (c). А такъ какъ предѣлъ положительнаго перемѣннаго числа равенъ положительному числу или нулю, а предѣлъ отрицательнаго перемѣннаго числа равенъ отрицательному числу или нулю, то:

$$f'(c)=0,$$

т. е. при $x=c$ касательная дѣйствительно параллельна хордѣ. Случай, когда $f(x)$ уменьшается, начиная отъ $x=a$, разбирается совершенно такъ, какъ и только что разсмотрѣнный.

b) Если хорда дуги не совпадаетъ съ осью абсциссъ (черт. 11-й). то мы можемъ перенести оси координатъ такимъ образомъ, чтобы это совпаденіе имѣло мѣсто, и тогда будемъ въ условіяхъ перваго случая.

Такимъ образомъ теорема доказана вполнѣ.

77. Итакъ, въ интервалѣ (a и b), при указанныхъ выше условіяхъ, всегда существуетъ касательная, параллельная хордѣ. Значитъ, угловой коэффиціентъ касательной равенъ угловому коэффиціенту хорды. Но угловой коэффиціентъ хорды равенъ:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a};$$

а угловой коэффиціентъ касательной есть $f'(c)$.

Поэтому:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\kappa)$$

Здѣсь нужно помнить, что c есть число промежуточное между a и b.

Иногда теорему Лагранжа выражаютъ въ нѣсколько другой формѣ.

Пусть:

$$a=x$$
$$b=x+h.$$

Тогда значеніе c, промежуточное между x и x+h, можно выразить черезъ: $x+\theta h,$

гдѣ θ положительная правильная дробь. При этихъ новыхъ обозначеніяхъ равенство (к) перепишется такъ:

$$f(x+h)-f(x)=h\,f'(x+\theta h).$$

Такова окончательная форма **теоремы Лагранжа.**

---

*) $f'(c)$ есть, по условію, конечное число.

Постоянство, возрастаніе и убываніе функцій.

78. Разсматривая чер. 6, стр. 29 мы уже пришли къ нѣкоторымъ **догадкамъ** относительно связи измѣненія данной функціи съ измѣненіемъ ея производной. Перейдемъ теперь къ **точному установленію** признаковъ постоянства, возрастанія и убыванія функцій. При этомъ мы будемъ постоянно предполагать, что данныя функціи въ области разсматриваемаго интервала удовлетворяютъ условіямъ теоремы Лагранжа.

Постоянство функцій.

79. Мы уже видѣли, что, если въ области извѣстнаго интервала:

$$f(x)=C \text{ (пост. число)},$$

то въ той же области:

$$f'(x)=0.$$

Теперь докажемъ обратную теорему: **если въ области извѣстнаго интервала постоянно:**

$$f'(x)=0,$$

то въ той же области:

$$f(x)=C \text{ (пост. число)}.$$

Замѣтимъ прежде всего, что, съ геометр. точки зрѣнія, теорема эта почти очевидна: если касательная къ нѣкоторой кривой постоянно параллелъна оси абсциссъ, то эта кривая есть прямая линія, параллельная оси иксовъ, и слѣдовательно:

$$y=f(x)=C.$$

Для точнаго доказательства теоремы возьмемъ внутри даннаго интервала два значенія функціи, соотвѣтствующія значеніямъ независимаго перемѣннаго x и x+h:

$$f(x+h) \text{ и } f(x)$$

и спросимъ себя, равны ли они, какъ это должно имѣть мѣсто, если:

$$f(x)=C.$$

Составимъ разность:

$$f(x+h)-f(x)$$

и примѣнимъ къ ней теорему Лагранжа. Тогда получимъ:

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h).$$

Но такъ какъ $x+\theta h$ находится внутри даннаго интервала, то $f'(x+\theta h)$, по условію теоремы, равна 0 и, значитъ:

$$f(x+h)=f(x).$$

Слѣдовательно, всѣ значенія функціи внутри даннаго интервала равны между собой, и потому:

$$f(x)=C.$$

Возрастаніе функцій.

80. Функція незав. перемѣннаго x называется **возрастающей** въ данномъ интервалѣ, если она въ этомъ интервалѣ **увеличивается съ увеличеніемъ x;** иначе говоря, возрастающая функція $f(x)$, при положительномъ h, удовлетворяетъ условію:

$$f(x+h)-f(x)>0$$

въ границахъ даннаго интервала.

Теорема. Если f (x) возрастаетъ въ данномъ интервалѣ, то производная ея въ томъ же интервалѣ положительна или равна нулю.

Выбираемъ въ области даннаго интервала нѣкоторое произвольное значеніе x и желаемъ доказать, что:

$$f'(x)\geqq 0.$$

Съ этою цѣлью возьмемъ въ томъ же интервалѣ значеніе $x+h$, гдѣ $h>0$, составимъ разность:

$$f(x+h)-f(x)$$

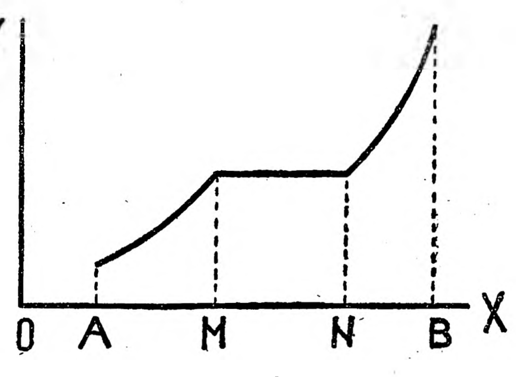
и примѣнимъ къ ней теорему Лагранжа. Тогда получимъ:

$$f(x+h)-f(x)=h\ f'(x+\theta h).$$

Будемъ теперь неограниченно приближать h къ нулю; тогда $f'(x+\theta h)$ будетъ стремиться къ своему предѣлу $f'(x)$, оставаясь всевремя, больше 0, п. ч. $f(x+h)-f(x)>0$ по условію теоремы. Поэтому и этотъ предѣлъ, т.-е. $f'(x)$, будетъ либо положительнымъ числомъ, либо нулемъ, т.-е.:

$$f'(x)\geqq 0$$

ч. и т. д.



Черт. 13.

Обратимъ вниманіе на тотъ случай, когда $f'(x)=0$.

Очевидно, что тѣ значенія x, при которыхъ $f'(x)=0$, не могутъ составлять сплошной части въ области даннаго интервала (иначе говоря, при возрастаніи функціи въ области AB невозможенъ графикъ, изображенный на чер. 13), ибо тогда въ этой части (MN) функція была бы постоянной, а намъ сказано, что она возрастаетъ. Слѣдовательно, случаи, когда $f'(x)=0$, относятся къ нѣкоторымъ частнымъ значеніямъ x, къ нѣкоторымъ отдѣльнымъ точкамъ кривой въ данномъ интервалѣ, какъ это ясно усматривается изъ чертежа 14.

81. Обратная теорема. Если въ области даннаго интервала $f'(x)>0$, то $f(x)$ въ этомъ интервалѣ возрастаетъ.

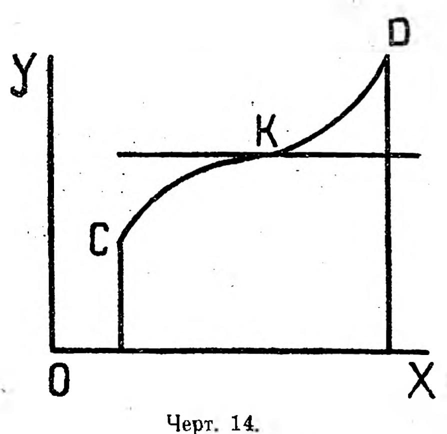
Здѣсь тоже изъ условій теоремы исключается предположеніе, что для сплошной части данной области:

$$f'(x)=0,$$

ибо этотъ случай уже разсмотрѣнъ (72) и даетъ: $f(x)=C$.

Слѣдовательно, мы предполагаемъ, что $f'(x)$ равна нулю только для отдѣльныхъ значеній x внутри даннаго интервала, для изолированныхъ точекъ кривой:

$$y=f(x).$$



Черт. 14.

Замѣтивъ это, перейдемъ къ доказательству теоремы.

Возьмемъ въ данномъ интервалѣ два какихъ-нибудь значенія икса: α и β, причемъ $\alpha>\beta$, и докажемъ, что:

$$f(\alpha)>f(\beta).$$

По теоремѣ Лагранжа:

$$f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha-\beta)\,f'(m), \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

гдѣ m есть нѣкоторое значеніе x, промежуточное между α и β.

Относительно $f'(m)$ мы, согласно условіямъ теоремы, можемъ сдѣлать **два предположенія:**

$$\text{или } f'(m)>0, \text{ или } f'(m)=0.$$

Если $$f'(m)>0,$$

то изъ равенства (A) выходитъ, что:

$$f(\alpha)>f(\beta),$$

что и требовалось доказать.

Если же:

$$f'(m)=0,$$

то пришлось бы заключить, что:

$$f(\alpha)=f(\beta),$$

т.-е. возрастанiе функцiи не имѣетъ мѣста.

Покажемъ, что это невозможно, т.-е. докажемъ, что хотя $f'(x)$, по условiю теоремы, можетъ быть равна 0 для нѣкоторыхъ частныхъ значенiй x, однако, пользуясь въ данномъ случаѣ теоремой Лагранжа, мы никогда не попадемъ на такое значенiе $x=m$, при которомъ:

$$f'(m)=0 \text{ *)}.$$

Доказательство будетъ отъ противнаго:

Допустимъ, что:

$$f'(m)=0;$$

тогда:

$$f(\alpha)=f(\beta).$$

Дальше будемъ разсуждать такъ: такъ какъ случай постоянства $f(x)$ въ интервалѣ (α, β) исключенъ, то мы въ этомъ интервалѣ можемъ найти такое значенiе γ, что:

$$f(\alpha) \neq f(\gamma).$$

Примѣняя теперь къ $f(\alpha)$ и $f(\gamma)$ теорему Лагранжа, найдемъ:

$$f(\alpha)-f(\gamma)=(\alpha-\gamma)\ f'(m'),$$

гдѣ m' есть нѣкоторое значенiе x, промежуточное между α и γ.

Такъ какъ здѣсь:

$$f(\alpha) \neq f(\gamma), \text{ то:}$$

$$f'(m') \neq 0,$$

и слѣдовательно, согласно заданiю:

$$f'(m') > 0,$$

а потому и:

$$f(\alpha) > f(\gamma) \text{ (чер. 15).}$$

Черт. 15.

*) Это обстоятельство ясно усматривается изъ чер. (14): ни одна хорда дуги CD не параллельна касательной въ точкѣ K, угловой коэффицiентъ которой равенъ 0.

Примѣнимъ теперь формулу Лагранжа къ $f(\gamma)$ и $f(\beta)$:

$$f(\gamma)-f(\beta)=(\gamma-\beta).f'(m''),$$

гдѣ m'' нѣкоторое среднее значенiе между γ и β.

Каково здѣсь значенiе $f'(m'')$, мы не знаемъ и обязаны допустить согласно условiямъ теоремы, что:

$$f'(m'')>0,$$

а тогда:

$$f(\gamma)>f(\beta);$$

но:

$$f(\beta)=f(\alpha),$$

а потому выходитъ, что:

$$f(\gamma)>f(\alpha),$$

а раньше мы получили что:

$$f(\gamma)<f(\alpha).$$

Противорѣчiе получилось вслѣдствiе предположенiя, что:

$$f'(m)=0.$$

Слѣдовательно, такое предположенiе невозможно, и всегда будетъ имѣть мѣсто неравенство:

$$f(\alpha)>f(\beta),$$

т.-е., при данныхъ въ теоремѣ условiяхъ, функцiя будетъ возрастающей.

Убыванiе функцiй.

82. Функцiя независимаго перемѣннаго x называется **убывающей** внутри даннаго интервала, если въ этомъ интервалѣ она **уменьшается съ увеличенiемъ x**; иначе говоря, убывающая функцiя $f(x)$, при h положительномъ, удовлетворяетъ условiю:

$$f(x+h)-f(x)<0$$

въ границахъ даннаго интервала.

Теорема. Если $f(x)$ убываетъ въ данномъ интервалѣ, то производная ея $f'(x)$ въ томъ же интервалѣ отрицательна или равна 0.

Обратная теорема. Если въ данномъ интервалѣ $f'(x)\leq 0$, то $f(x)$ въ этомъ интервалѣ убываетъ.

Доказательства этихъ двухъ теоремъ совершенно одинаковы съ доказательствами двухъ предыдущихъ теоремъ, и оговорки относительно изолированности тѣхъ значенiй, при которыхъ $f'(x)=0$, разумѣется, имѣютъ мѣсто и здѣсь.

Изслѣдованіе возрастанія и убыванія функцій.

83. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что вопросъ о возрастаніи и убываніи функцій рѣшается знакомъ производной функціи. Слѣдовательно, при изслѣдованіи измѣненія всякой функціи, необходимо опредѣлить, **при какихъ значеніяхъ x производная ея мѣняетъ свой знакъ.** Но производная, какъ и всякая функція, можетъ измѣнять свой знакъ, или проходя черезъ 0, или проходя черезъ тѣ значенія x, при которыхъ она разрывается *).

Слѣдовательно, **прежде всего необходимо опредѣлить корни уравненія:**

$$f'(x)=0$$

и тѣ значенія x, при которыхъ f′(x) разрывается, и затѣмъ изслѣдовать, измѣняются ли знаки производной при переходѣ черезъ эти значенія x **).

Такимъ образомъ **намѣтятся** тѣ **интервалы**, внутри которыхъ производная сохраняетъ постоянно одинъ и тотъ же знакъ, дающій возможность судить о ходѣ измѣненія функціи.

Отмѣтимъ еще одно очень важное обстоятельство: **внутри каждаго интервала не должно быть разрывовъ ни самой функціи, ни ея производной,** ибо этого требуютъ условія теоремъ о возрастаніи и убываніи функцій. Игнорированіе этого обстоятельства можетъ повести къ ложнымъ выводомъ, какъ это мы увидимъ въ одномъ изъ слѣдующихъ примѣровъ.

84. Примѣръ 1.

Опредѣлить области возрастанія и убыванія функціи:

$$f(x)=(x^2-1)^2\ (x+1).$$

Эта функція и ея производная:

$$f'(x)=(x+1)^2\ (x-1)\ (5x-1)$$

дѣйствительны и непрерывны при всѣхъ дѣйствительныхъ значеніяхъ x.

---

*) Напримѣръ: $f(x)=\frac{1}{x-2}$ проходя черезъ $x=2$ мѣняетъ свой знакъ.

Иногда эту мысль выражаютъ такъ: f(x) можетъ мѣнять свой знакъ, проходя черезъ ∞, что, конечно, условно, ибо въ дѣйствительности (см. § 34) f(x) теряетъ смыслъ при $x=2$.

**) Знаки могутъ и сохраняться. Напримѣръ:

$$f(x)=(x-2)^2$$

$$f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}.$$

$f'(x)$ обращается въ 0 при слѣдующихъ значеніяхъ x, расположенныхъ въ порядкѣ ихъ возрастанія:

$$-1, \frac{1}{5}, +1.$$

Эти три значенія x опредѣляютъ слѣдующіе 4 интервала:

$-\infty$ — -1	-1 — $\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$ — 1	1 — $+\infty$
1-й интервалъ	2-й интервалъ.	3-й интервалъ.	4-й интервалъ.

Внутри каждаго изъ этихъ интерваловъ $f'(x)$ сохраняетъ свой знакъ, ибо не обращается въ 0. Чтобы опредѣлить, какой именно знакъ имѣетъ производная внутри каждаго интервала, стоитъ только подставить въ производную какое-либо значеніе x, взятое внутри даннаго интервала.

При всякомъ отрицательномъ значеніи икса $f'(x)$ положительна (п. ч. оба послѣдніе множ. производной отрицательны, а первый положителенъ). Слѣдовательно, производная будетъ положительна и въ первомъ и во второмъ интервалѣ, т. к. отрицательныя значенія x входятъ и во 2-ой интервалъ.

Въ третьемъ интервалѣ:

$$\frac{1}{5} < x < 1.$$

Подставляя въ производную вмѣсто икса $\frac{1}{2}$, увидимъ, что она обратится въ отрицательное число $-\frac{27}{16}$; слѣдовательно, въ третьемъ интервалѣ производная отрицательна, въ чемъ еще проще можно было убѣдиться по знакамъ множителей производной. Наконецъ, въ четвертомъ интервалѣ всѣ множители производной положительны, а слѣдовательно, и сама производная тоже положительна.

Окончательное заключеніе таково: въ предѣлахъ отъ $-\infty$ до -1 производная положительна, слѣдовательно, $f(x)$ возрастаетъ; въ предѣлахъ отъ -1 до $\frac{1}{5}$ производная тоже положительна, слѣдовательно, функція опять возрастаетъ; въ предѣлахъ отъ $\frac{1}{5}$ до 1 производная отрицательна, слѣдовательно, $f(x)$ убываетъ; въ интервалѣ $(1, +\infty)$ производная положительна, слѣдовательно, функція опять возрастаетъ.

Всѣ эти результаты наглядно усматриваются изъ слѣдующей таблицы:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{5}$		1		$+\infty$
y′		+	0	+	0	−	0	+	
y		↗		↗		↘		↑	

въ которой поднятая вверхъ стрѣлка означаетъ возрастаніе функцій, а опущенная внизъ—ея убываніе.

Два интервала $(-\infty, -1)$ и $\left(-1, \frac{1}{5}\right)$, въ которыхъ не содержится разрывовъ функціи и ея производной, можно соединить въ одинъ и сказать, что въ интервалѣ:

$$\left(-\infty, \frac{1}{5}\right)$$

функція возрастаетъ непрерывно.

Примѣръ 2-ой.

Изслѣдовать области возрастанія и убыванія функціи:

$$f(x) = +\sqrt{2x - x^2}.$$

Функція существуетъ и непрерывна только внутри интервала (0, 2) со включеніемъ границъ. Производная ея:

$$f(x) = \frac{1 - x}{+\sqrt{2x - x^2}}$$

существуетъ и непрерывна въ тѣхъ же предѣлахъ, за исключеніемъ границъ.

Изслѣдованію подлежитъ, слѣдовательно, только область внутри интервала (0,2), и результатъ изслѣдованія выражается слѣдующей табличкой:

x	0		1		2
y′		+	0	−	
y		↗		↘	

Примѣръ 3-й.

Изслѣдовать измѣненіе функціи:

$$f(x)=\frac{x-1}{x-2}.$$

Производная этой функціи:

$$f'(x)=-\frac{1}{(x+2)^2}$$

отрицательна при всѣхъ значеніяхъ x, однако отсюда никакъ нельзя заключить, что функція всегда убываетъ.

И дѣйствительно:

$$f(0)=\frac{1}{2},$$

а

$$f(3)=2.$$

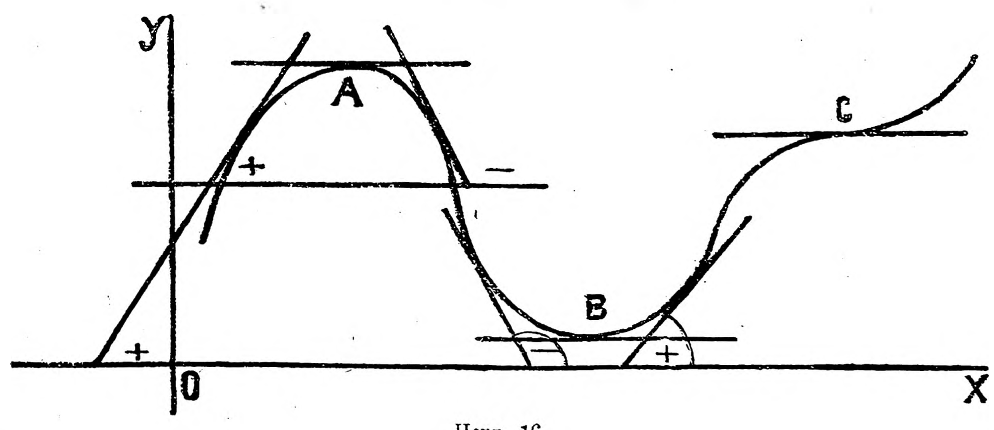
Дѣло въ томъ, что $f(x)$ и $f'(x)$ разрываются (перестаютъ существовать) при $x=2$, и поэтому необходимо разсматривать два интервала: $(-\infty, 2)$ и $(2, +\infty)$.

Внутри каждаго интервала функція убываетъ: въ первомъ отъ 1 до $-\infty$ и во второмъ отъ $+\infty$ до 1.

Понятно, что эти два интервала нельзя соединить въ одинъ.

Maximum и minimum функцій.

85. При изслѣдованіи измѣненій функцій необходимо обратить особое вниманіе на тѣ значенія функцій, которыя или больше

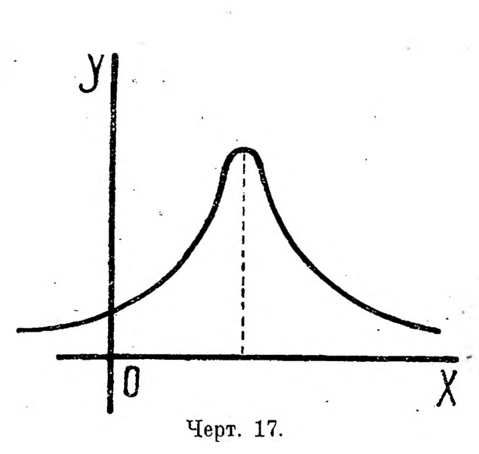


Черт. 16.

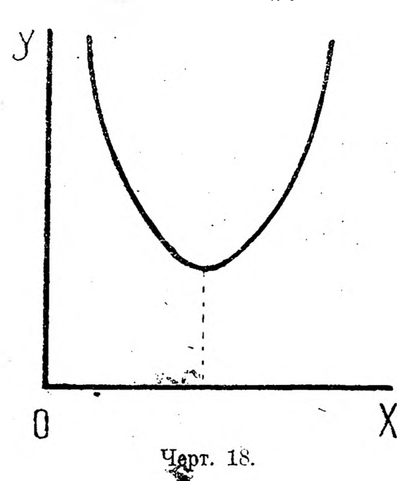
всѣхъ смежныхъ съ ними (черт. 16, A), или меньше всѣхъ смежныхъ съ ними (чер. 16, B). При этомъ ясно, что подъ смежными

значеніями функцій слѣдуетъ понимать такія, которыя соотвѣтствуютъ безконечно-близкимъ между собою значеніямъ независимаго перемѣннаго. Если, напримѣръ, разсматривается значеніе f(x) при x=*a*, т.-е. f(*a*), то всѣ смежныя съ нимъ значенія будутъ заключены въ интервалѣ [(a—h), (a+h)], гдѣ h полож. б.-м. число. Тѣ значенія функціи, которыя **больше всѣхъ смежныхъ** съ ними, называются **maximum**'ами, а тѣ значенія функціи, которыя **меньше всѣхъ смежныхъ** съ ними, называются **minimum**'ами функціи.

86. Maximum'ы и minimum'ы функціи иногда дѣйствительно могутъ быть наибольшими и наименьшими значеніями функціи на

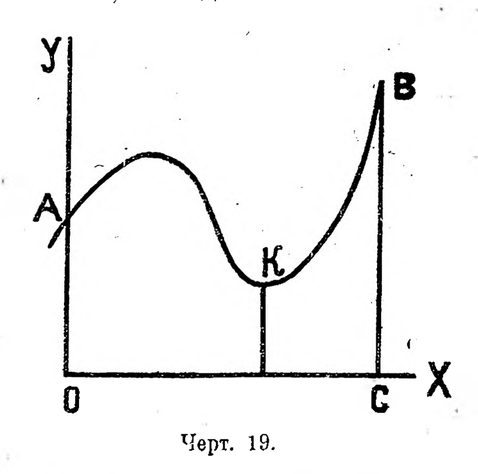


Черт. 17.



Черт. 18.

всемъ пространствѣ или въ данномъ интервалѣ ея измѣненія, какъ это усматривается изъ чертежей 17 и 18; иногда же этимъ свойствомъ они вовсе не обладаютъ; такъ, для функціи чертежа 19, измѣняющейся въ интервалѣ OC, наименьшее значеніе функціи совпадаетъ съ minimum'омъ (K), а наибольшее (CB) отвѣчаетъ крайнему значенію функціи.



Черт. 19.

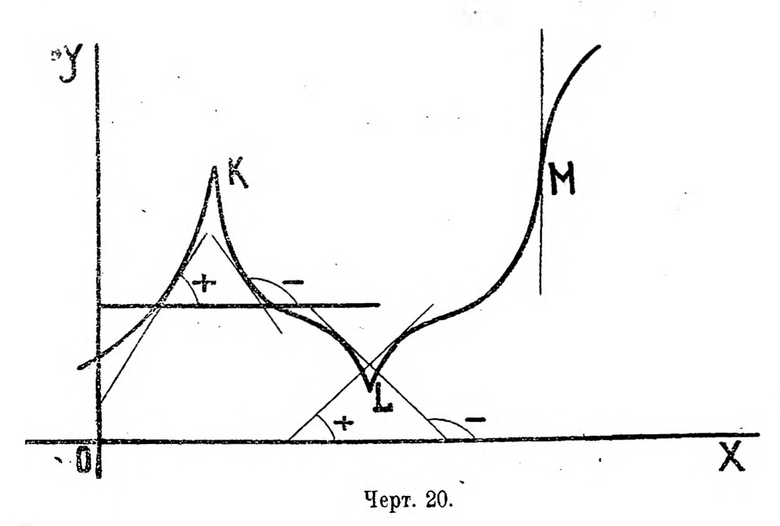
Функція можетъ имѣть нѣсколько, а иногда даже безч. множество, max. и min., причемъ max. могутъ быть и меньше min.

Въ каждой частной задачѣ, требующей **разысканія наибольшихъ и наименьшихъ значеній** функціи, придется подвергнуть особому **анализу** вопросъ о томъ, **какіе maximum'ы, minimum'ы или крайнія значенія функціи отвѣчаютъ этому требованію.**

Далѣе мы будемъ говорить исключительно о *maximum*'ѣ и *minimum*'ѣ на почвѣ данныхъ выше опредѣленій.

87. Обзоръ чертежей (16 и 20) наводитъ насъ на **догадку** о томъ, что **maximum** и **minimum** функціи могутъ имѣть мѣсто въ **двухъ** различныхъ **случаяхъ**:

1) **При обращеніи непрерывной производной въ ноль** (A, B, черт. 16), причемъ производная, проходя черезъ значеніе x, соот-



Черт. 20.

вѣтствующее *maximum*'у функціи (A), мѣняетъ свой знакъ съ + на —, а переходя черезъ значеніе x, соотвѣтствующее *minimum*'у (B) функціи, измѣняетъ свой знакъ съ—на+.

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы видимъ (C, черт. 16), что производная можетъ обратиться въ 0 при отсутствіи *maximum*'а или *minimum*'а; но тогда знакъ производной до обращенія въ ноль одинаковъ со знакомъ ея послѣ обращенія въ 0 *).

2) **При разрывѣ производной,** (черт. 20) причемъ опять при *maximum*'ѣ (K) производная, проходя черезъ разрывъ, мѣняетъ свой знакъ съ + на —, а при *minimum*'ѣ (L) съ — на + **).

Если производная, разрываясь, не мѣняетъ знака (M), то нѣтъ ни *maximum*'а ни *minimum*'а.

Подтвердимъ эти догадки **точнымъ изслѣдованіемъ,** причемъ разсмотримъ сначала тотъ случай, когда производная данной **функціи** непрерывна при разсматриваемомъ значеніи x.

---

*) Проведите касательныя около точки C.

**) Производная разрывается въ точкѣ K, п. ч. въ этой точкѣ кривая имѣетъ 2 касательныя. Производная разрываеся въ точкѣ M, п. ч. перестаетъ здѣсь существовать обращается въ безконечность).

Maximum и minimum при непрерывности производной.

88. Теорема. Если при $x=a$ имѣетъ мѣсто maximum или minimum функціи $f(x)$, то:

$$f'(a)=0.$$

Дѣйствительно, если при $x=a$ наступаетъ, напримѣръ, maximum, то это значитъ, что въ интервалѣ $(a-h, a)$, гдѣ h — б. м. пол. число, $f(x)$ возрастаетъ, а въ интервалѣ $(a, a+h)$ убываетъ.

Слѣдовательно, въ первомъ интервалѣ $f'(x)$ положительна, во второмъ отрицательна, а при переходѣ отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ непрерывная функція $f(x)$ должна обратиться въ 0, т.-е.:

$$f'(a)=0$$

ч. и т. д.

Такъ же доказывается случай minimum'a.

89. Итакъ, всѣ тѣ значенія x, при которыхъ $f(x)$ обращается въ max. или въ min. заключаются въ числѣ корней уравненія:

$$f'(x)=0.$$

Но **всякій-ли корень этого уравненія соотвѣтствуетъ max. или min?**

На это даетъ отвѣтъ слѣдующая теорема.

90. Обратная теорема справедлива не въ полномъ своемъ объемѣ, т.-е. **не всякій корень производной обращаетъ функцію въ maximum** или **minimum, а только тѣ корни производной даютъ maximum** или **minimum функціи, при которыхъ производная измѣняетъ свой знакъ.** Дѣйствительно, если a есть корень производной и если въ интервалѣ $(a-h, a)$ $f'(x)$ положительна, а въ интервалѣ $(a, a+h)$ отрицательна, то это значитъ, что въ первомъ интервалѣ $f(x)$ возрастаетъ, а во второмъ убываетъ и, слѣдовательно, при $x=a$ достигаетъ своего maximum'a. Точно также объясняется и другой случай, когда производная до обращенія въ ноль отрицательна, а послѣ обращенія въ ноль положительна; этотъ корень производной укажетъ намъ minimum функціи.

Если же производная, обратясь въ 0, сохраняетъ затѣмъ прежній свой знакъ, то это значитъ, что функція все время возрастаетъ, или все время убываетъ, и слѣдовательно соотвѣтствующій корень производной не даетъ ни maximum'a ни minimum'a функціи.

Maximum и minimum функціи при разрывѣ производной.

91. Изъ предыдущаго ясно, что maximum или minimum функціи наступаетъ тогда, когда производная ея переходитъ отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ или наоборотъ. При этомъ, въ случаѣ непрерывности производной, она непремѣнно должна пройти черезъ 0. Но если производная разрывается *) при нѣкоторомъ частномъ значеніи $x=a$, то **перемѣна знака производной можетъ случиться именно при переходѣ черезъ разрывъ**, т.-е. при $x=a$, и тогда **это значеніе x будетъ соотвѣтствовать maximum'у или minimum'у функціи**, въ зависимости отъ того, переходитъ ли $f'(x)$ отъ полож. значеній къ отрицательнымъ или наоборотъ.

Не будетъ ни maximum'а, ни minimum'а, если послѣ разрыва производная сохраняетъ такой же знакъ, какъ и до разрыва.

Практическое правило для разысканія maximum'овъ и minimum'овъ функцій.

92. Изъ всего вышеизложеннаго вытекаетъ слѣдующее правило для разысканія max. и min. функціи:

1) **Найдите всѣ корни производной функціи.**

2) **Найдите всѣ тѣ значенія производной, при которыхъ она, разрывается.**

3) **Изъ всѣхъ найденныхъ значеній сдѣлайте отборъ тѣхъ, при переходѣ черезъ которыя производная мѣняетъ свой знакъ; всѣ они опредѣлятъ maximum'ы или minimum'ы функціи.**

Будетъ maximum, если производная измѣняетъ свой знакъ съ + на — ; будетъ minimum, если производная измѣняетъ свой знакъ съ — на +.

Вопросъ о знакахъ производной, до обращенія ея въ 0 и послѣ обращенія ея въ 0, при $x=a$, т.-е. о знакахъ:

$$f'(a-h) \text{ и } f'(a+h),$$

гдѣ h полож. б.-м. число, рѣшается, какъ указано въ § 83, въ зависимости отъ тѣхъ интерваловъ, къ которымъ принадлежатъ $a-h$ и $a+h$.

---

*) При этомъ предполагается однако существованіе производной въ интервалахъ $(a, a-h)$ и $(a, a+h)$ гдѣ h - б. м. ч., иначе теорема Лагранжа, на которой построены всѣ наши выводы, была бы непримѣнима.

Если же эти интервалы не опредѣлены, то можно непосредственно опредѣлить знаки $f'(a-h)$ и $f'(a+h)$, пользуясь соображеніями, которыя будутъ указаны далѣе.

Примѣръ 1-й.

93. Опредѣлить maximum и minimum функціи:

$$y=\sqrt[3]{2x^3-15x^2+36x-27}.$$

Производная ея:

$$y'=\frac{2(x-2)}{\sqrt[3]{(2x-3)^2(x-3)}}$$

обращается въ 0 при $x=2$; разрывается при $x=\frac{3}{2}$ и при $x=3$.

$x=2$ . . . даетъ maximum $y=1$;
$x=3$ . . . даетъ minimum $y=0$;
$x=\frac{3}{2}$ не соотв. ни max., ни min.

Все это очень легко обнаруживается изъ разсмотрѣнія знаковъ производной до обращенія ея въ 0 и послѣ обращенія въ 0, до разрыва ея и послѣ разрыва. Напримѣръ, при $x=2-h$, гдѣ h — пол. б. м. ч., числитель производной отрицателенъ и тоже относится къ множителю $x-3$ знаменателя. Слѣдовательно, производная положительна. При $x=2+h$ измѣняется знакъ числителя и, слѣдовательно, производная дѣлается отрицательною.

Примѣръ 2-ой.

Опредѣлить max. и min. функціи:

$$y=\operatorname{Sin}x+\frac{1}{2}\operatorname{Sin}2x.$$

Изъ вида функціи слѣдуетъ, что она періодическая, и полный періодъ ея измѣненія равенъ 2π.

Слѣдовательно, достаточно опредѣлить ея max. и min. въ области $(0,2\pi)$. Находимъ производную:

$$y'=\operatorname{Cos}x+\operatorname{Cos}2x$$

и рѣшаемъ уравненіе:

$$\operatorname{Cos}x+\operatorname{Cos}2x=0$$

или:

$$\operatorname{Cos}2x=\operatorname{Cos}(\pi-x)$$

и находимъ въ области періода слѣдующіе корни:

$$x_1=\frac{\pi}{3}\ ;\ x_2=\pi;\ x_3=\pi+\frac{2\pi}{3}.$$

Представивъ производную подъ видомъ:

$$y'=2\ \mathrm{Cos}\frac{3x}{2}.\ \mathrm{Cos}\ \frac{x}{2},$$

легко опредѣлимъ ея знаки до и послѣ обращенія въ 0 и заключимъ, что:

$x=\frac{\pi}{3}$ соотвѣтствуетъ max. $y=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

$x=\pi$ не даетъ ни max, ни. min.;

$x=\pi+\frac{2\pi}{3}$ соотвѣтствуетъ min. $y=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Если разсматривать полное измѣненіе функціи, то maximum'овъ и minimum'овъ будетъ безчисленное множество.

Примѣръ 3-й.

Опредѣлить max. и min. функціи:

$$y=1-\sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

Опредѣляемъ производную:

$$y'=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}.$$

Она разрывается при $x=1$, переходя отъ полож. значеній къ отриц.

Слѣдовательно, $x=1$ соотвѣтствуетъ max. $y=1$.

Примѣръ 4-й. Опредѣлить max. и min. функціи:

$$y=1-\sqrt[3]{x-1}.$$

Такъ какъ:

$$y'=-\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}},$$

то значеніе $x=1$, при которомъ функція разрывается, не соотвѣтствуетъ ни max. ни min. (ибо знакъ производной до разрыва и послѣ разрыва одинаковъ).

Примѣръ 5-й. Прямая, длина которой равна 6 сантиметрамъ, раздѣлена на двѣ части: x сант. и 6—x сант. и на этихъ частяхъ построены квадраты. Опредѣлить наиб. и наим. величины суммы S площадей этихъ квадратовъ при измѣненіи x отъ 0 до 6 сант. включительно.

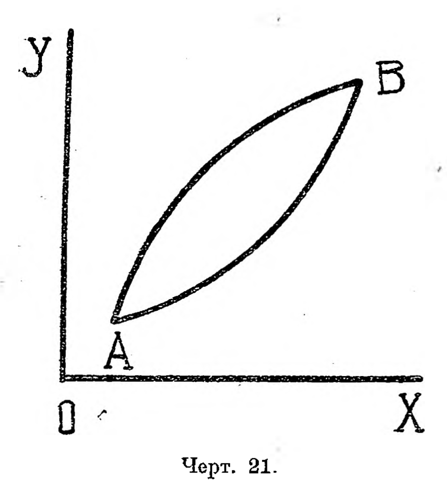
$$S = x^2 + (6 - x)^2$$
$$S' = 4x - 12.$$

Единственный minimum S получается при x=3 и доставляетъ наименьшее значеніе S равное 18 кв. сант.

Maximum'a нѣтъ, а наибольшія значенія S опредѣляются крайними значеніями площади при x=0 и при x=6; каждое изъ нихъ равно 36 кв. сант.

94. Мы теперь владѣемъ всѣми данными для полнаго изслѣдованія измѣненій функцій, но, прежде чѣмъ перейти къ примѣрамъ изслѣдованія функцій и построенія ихъ графиковъ, сдѣлаемъ два указанія, относящіяся къ вычерчиванію кривыхъ.

Первое касается направленія вогнутости кривой.



Черт. 21.

Если мы опредѣлили двѣ точки A и B, принадлежащія кривой, и знаемъ, напримѣръ, что въ интервалѣ AB функція возрастаетъ, то дугу AB можно чертить двоякимъ образомъ (см. черт. 21). Спрашивается, какой же чертежъ соотвѣтствуетъ каждому данному случаю? Мы укажемъ далѣе признаки, опредѣляющіе тотъ или другой ходъ кривой.

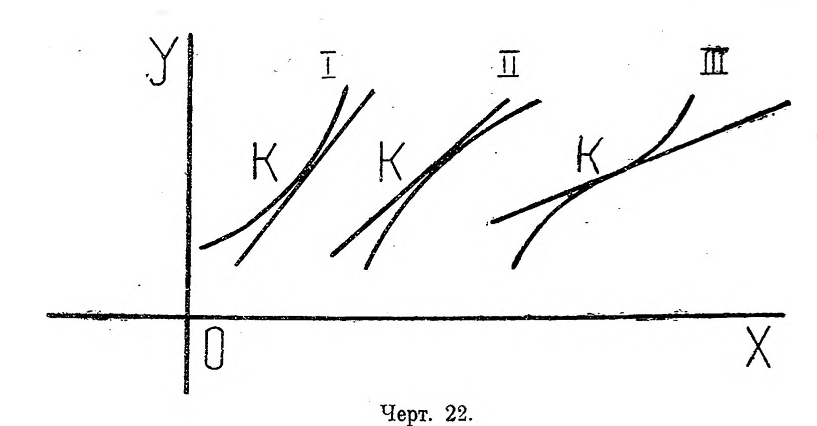
Второе указаніе относится къ безконечнымъ вѣтвямъ кривой: иногда безконечныя вѣтви кривыхъ безгранично приближаются къ нѣкоторымъ прямымъ, такъ называемымъ **асимптотамъ** (вспомните гиперболу), и знаніе этихъ асимптотъ очень облегчаетъ вычерчиваніе кривыхъ и сужденіе о ходѣ измѣненій функцій.

Мы укажемъ далѣе простѣйшіе случаи разысканія асимптотъ.

О направленіи вогнутости кривой.

95. Пусть имѣемъ какую-нибудь кривую линію: $y = f(x)$ (черт. 22) и касательную къ ней въ нѣкоторой точкѣ K, причемъ эта касательная предполагается непараллельною оси y-овъ. Изъ черт. 22, ясно, что кривая въ смежности съ точкой касанія можетъ занимать одно изъ трехъ положеній:

Первое характеризуется тѣмъ, что въ смежности съ точкой касанія **ординаты кривой по обѣ стороны точки касанія больше соотвѣтствующихъ ординатъ касательной;** при **второмъ** положеніи, наоборотъ, **ординаты касательной въ смежности съ точкой касанія больше соотвѣтствующихъ ординатъ кривой;** и наконецъ въ **3-мъ случаѣ** касательная **переходитъ съ одной стороны кривой на другую, и ординаты ея по одну сторону точки касанія и въ**



Черт. 22.

смежности съ нею больше соотвѣтствующихъ ординатъ кривой, а по другую сторону точки касанія меньше.

Въ первомъ случаѣ говорятъ, что кривая около точки касанія K **вогнута въ сторону положительной оси ординатъ;** во второмъ, что кривая обращена **вогнутостью въ сторону отриц. оси ординатъ** и въ третьемъ, что точка K **есть точка перегиба.**

96. Укажемъ признаки, по которымъ распознаются направленія вогнутости кривой и точки перегиба; съ этою цѣлью опредѣлимъ разность $\triangle$ ординатъ касательной ($У_{кас.}$) и кривой ($У_{кр.}$) въ смежности съ точкой касанія K (x, y).

Дадимъ x безконечно-малое приращеніе h, тогда ордината кривой $У_{кр.}$ опредѣлится такъ:

$У_{кр.} = f(x+h)$ или, по теоремѣ Лагранжа:

$У_{кр.} = f(x) + h\ f'(x+\Theta h)$.

Чтобы найти ординату касательной для того же значенія независимой перемѣнной (т.-е для $x+h$), напишемъ прежде уравненіе касательной въ точкѣ К:

$$Y-y=f'(x)\ (X-x).$$

Полагая здѣсь: $X=x+h$,

получимъ: $Y_{кас.}=h\ f'(x)+y=h\ f'(x)+f(x)$.

Поэтому: $\triangle = Y_{кр.}-Y_{кас.}=h\ [f'(x+\Theta h)-f'(x)]$.

Примѣняя къ послѣдней разности теорему Лагранжа, получимъ:

$$f'(x+\Theta h)-f'(x)=(\Theta h)\ f''[(x+\Theta_1(\Theta h)],$$

гдѣ Θ_1 означаетъ положительную правильную дробь, а $f''(x)$ есть производная отъ $f'(x)$ или, какъ говорятъ, вторая производная отъ $f(x)$ *).

Такимъ образомъ окончательно:

$$\triangle = Y_{кр.}-Y_{кас.}=\Theta h^2 f''(x+\Theta\Theta_1\ h).$$

При изслѣдованіи этой разности разсмотримъ три случая:

a) Если: $f''(x)>0$,

то, при непрерывности $f''(x)$, для достаточно малыхъ по абс. величинѣ полож. и отриц. значеній h будетъ также (36):

$$f''(x+\Theta\Theta_1 h)>0.$$

Поэтому: $\triangle>0$.

Слѣдовательно, въ смежности съ точкою К ординаты кривой больше соотвѣтствующихъ ординатъ касательной, и **кривая обращена своею вогнутостью въ сторону положительной оси ординатъ**.

b) Если: $f''(x)<0$,

то, при тѣхъ же условіяхъ:

$$f''(x+\Theta\Theta_1 h)<0$$

и $\triangle<0$.

Поэтому, въ смежности съ точкою К ординаты кривой меньше соотвѣтствующихъ ординатъ касательной, и **кривая обращена вогнутостью въ сторону отрицательной оси ординатъ** **).

c) Наконецъ, если: $f''(x)=0$,

то надо различать два случая:

---

*) $f''(x+\Theta\Theta_1 h)$ есть значеніе $f''(x)$ при значеніи независимаго перемѣннаго, равномъ $x+\Theta\Theta_1 h$.

**) Изъ условія $f''(x)>0$ слѣдуетъ, что $f'(x)$ увеличивается съ увеличеніемъ x, т.-е. увеличиваются углы, образованные касательною съ осью абсциссъ. Предлагаемъ убѣдиться въ этомъ непосредственно на черт. (22,1). Разсмотрите подобнымъ же образомъ случай, когда $f''(x)<0$.

a_1) **$f''(x)$, обращаясь въ 0, мѣняетъ свой знакъ.** Тогда разность ординатъ кривой и касательной по одну сторону точки касанія положительна, а по другую отрицательна, т.-е. съ одной стороны точки касанія и въ смежности съ нею ординаты кривой больше соотвѣтствующихъ ординатъ касательной, а съ другой меньше, и, слѣдовательно, **точка К есть точка перегиба.**

Замѣтимъ еще, что точки перегиба могутъ получиться при разрывѣ y'', если, проходя черезъ точку разрыва, y'' измѣняетъ свой знакъ.

b_1) **$f''(x)$ при переходѣ черезъ 0 не мѣняетъ своего знака,** т.-е. въ смежности съ точкой К остается либо все время положительной, либо все время отрицательной. Тогда въ первомъ случаѣ кривая около точки К **вэгнута въ сторону положительной оси ординатъ,** а во второмъ, **вогнута въ сторону отриц. оси ординатъ.**

97. Мы предполагали, что касательная не параллельна оси ординатъ; если-бы касательная оказалась параллельною оси ординатъ, то надо выразить x въ зависимости отъ y и, по предыдущимъ правиламъ, опредѣлять вогнутость или выпуклость въ отношеніи положительнаго или отриц. направленія оси абсциссъ.

98. Примѣръ 1. Изслѣдовать измѣненіе вогнутости и опредѣлить точки перегиба кривой:

$$y = x^3 - 3x^2.$$

Вторая производная опредѣляется такъ:

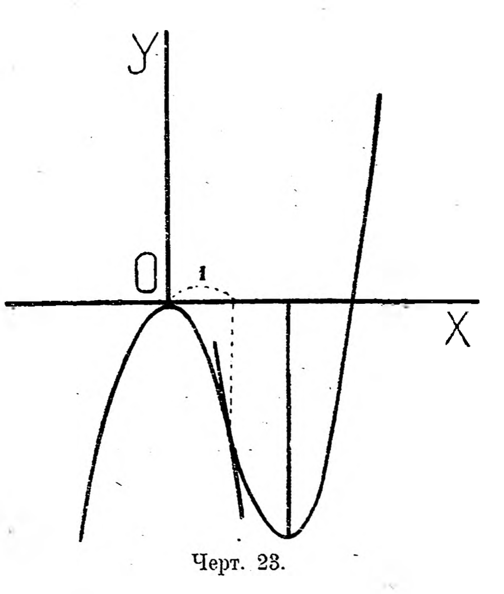
$$y'' = 6(x-1).$$

Слѣдовательно, внутри интервала $(-\infty, 1)$ y'' отрицательна, и кривая обращена вогнутостью въ сторону отриц. оси ординатъ. (Черт. 23).

При $x=1$

$$y''=0$$

и при переходѣ x черезъ единицу y'' мѣняетъ свой знакъ, слѣдовательно точка (1,—2) есть точка перегиба. Внутри интервала $(1, +\infty)$ y'' положительна и, слѣдовательно, кривая обращена вогнутостью въ сторону положительной оси ординатъ.



Черт. 23.

Примѣръ 2. Опредѣлить измѣненіе вогнутости и точки перегиба кривой:

$$y = x^6.$$

Такъ какъ: $y'' = 30x^4$,

то кривая всюду обращена вогнутостью въ сторону полож. оси ординатъ. (Черт. 24).

Хотя, при $x=0$, $y''=0$, но точка (0, 0) не есть точка перегиба, п. ч. y'', при переходѣ черезъ 0, не мѣняетъ знака.

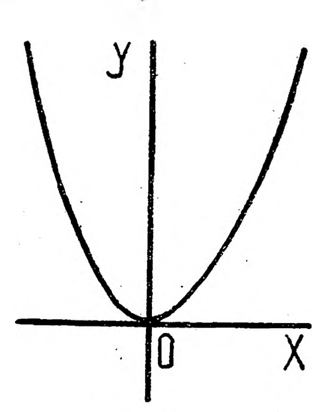
Примѣръ 3. Опредѣлить точку перегиба кривой:

$$y=\sqrt[3]{x^5}.$$

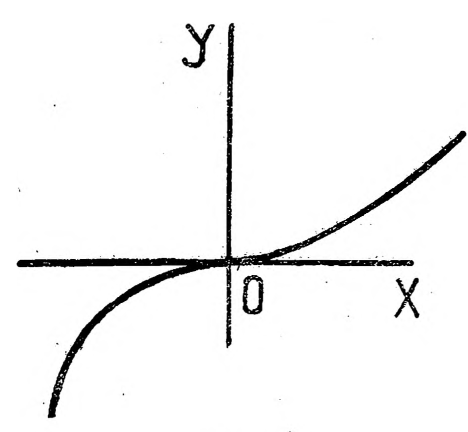
Вторая производная:

$$y''=\frac{10}{9\sqrt[3]{x}},$$

при $x=0$, разрывается и, при переходѣ x черезъ 0, мѣняетъ свой знакъ. Слѣдовательно, точка (0,0) есть точка перегиба. (Черт. 25).



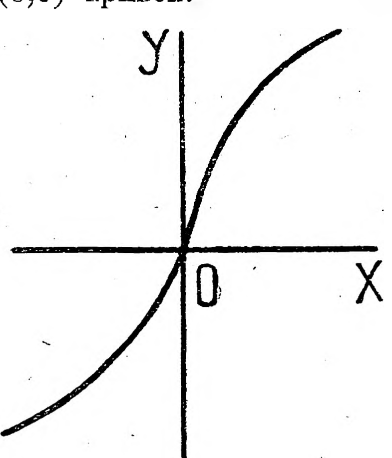
Черт. 24.



Черт. 25.

Примѣръ 4-й. Опредѣлить направленіе вогнутости около точки (0,0) кривой:

$$y=\sqrt[3]{x}.$$



Черт. 26.

Такъ какъ въ этой точкѣ (0,0) касательная параллельна оси ординатъ, потому что:

$$y'_{x=0}=\left[\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right]_{x=0}=\operatorname{tg} 90^0,$$

то опредѣляемъ x въ зависимости отъ y:

$$x=y^3,$$

и ищемъ x'':

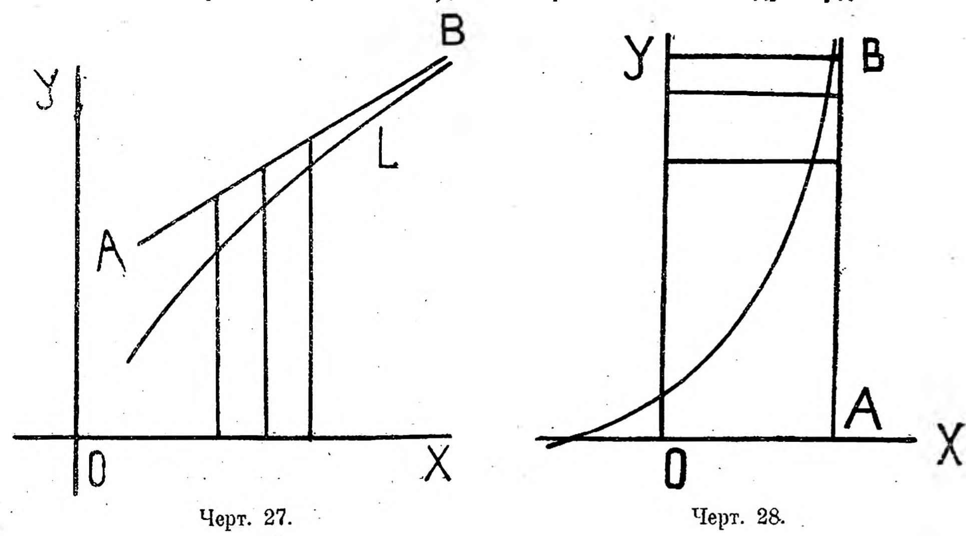
$$x''=6y;$$

при $y=0$ вторая производная обращается въ 0 и при переходѣ черезъ 0 мѣняетъ свой знакъ, поэтому точка (0,0) есть точка перегиба.

При всѣхъ полож. значеніяхъ у кривая обращена вогнутостью въ сторону положительной оси абсциссъ, а при всѣхъ отрицательныхъ значеніяхъ у вогнутость направлена въ сторону отриц. оси абсциссъ (черт. 26).

Асимптоты.

99. Прямая AB, не параллельная оси ординатъ, называется асимптотой кривой (черт. 27), **если разность между ординатами**



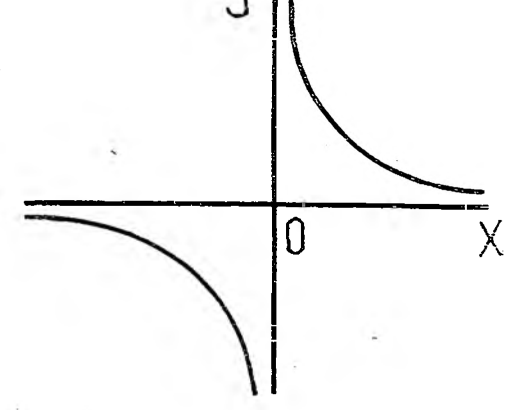
Черт. 27. Черт. 28.

кривой и ординатами прямой, соотвѣтствующими одному и тому же значенію X, стремится къ 0 при безграничномъ возрастаніи X. Въ случаѣ асимптоты, параллельной оси ординатъ, стремится къ нулю разность абсциссъ кривой и асимптоты, соотвѣтствующихъ одному и тому же значенію y, при безграничномъ его возрастаніи. (Черт. 28).

Не развивая общей теоріи асимптотъ, мы покажемъ здѣсь, какъ усматриваются асимптоты въ простѣйшихъ случаяхъ.

1) Для кривой:

$$y=\frac{a}{x}$$



Черт. 29.

асимптотами служатъ оси координатъ (черт. 29), ибо, съ безграничнымъ увеличеніемъ x, y стремится къ 0, а, съ безграничнымъ увеличеніемъ y, стремится къ нулю x.

2) Для кривой:

$$y = \frac{4}{x-2} \text{ (Черт. 30)}$$

асимптотами служать:

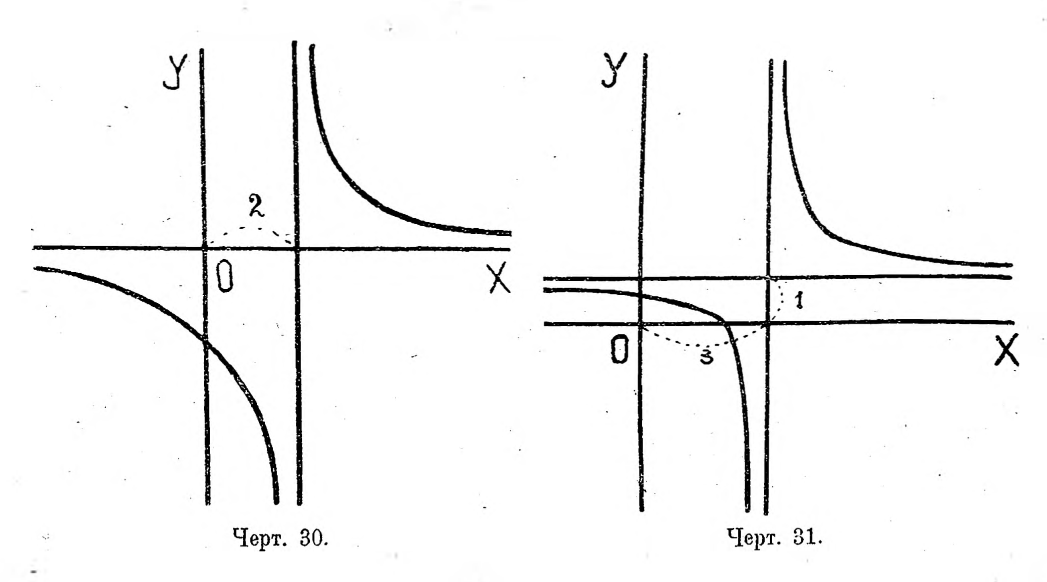
a) ось абсциссъ, ибо, съ безграничнымъ увеличеніемъ x, y стремится къ 0;

b) прямая $x=2$, что обнаруживается изъ преобразованнаго уравненія кривой:

$$x = 2 + \frac{4}{y};$$

3) Кривая:

$$y = \frac{x-2}{x-3} \text{ (черт. 31),}$$



Черт. 30. Черт. 31.

уравненіе которой можетъ быть представлено подъ слѣдующими видами:

$$y = 1 + \frac{1}{x-3} \text{ и } x = 3 + \frac{1}{y-1},$$

имѣетъ двѣ асимптоты:

$$y = 1$$
$$x = 3,$$

4) Кривая: $y = \frac{x^2-25}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-31}{(x-2)(x-3)}$.

Имѣетъ три асимптоты:

$$y = 1$$
$$x = 2$$
$$x = 3.$$

5) Кривая:
$$y=x+1+\frac{1}{x^2}$$
имѣетъ двѣ асимптоты:
$$y=x+1$$
и
$$x=0.$$

6) Кривая:
$$y^2=(x+2)^2+\frac{2}{x}$$
имѣетъ три асимптоты:
$$Y=\pm(x+2)$$
и
$$x=0.$$

Въ существованіи двухъ первыхъ асимптотъ убѣждаемся изъ равенства:
$$y-Y=\frac{2}{x(Y+y)}. \text{ *)}$$

7) Для кривой:
$$y=\text{Sin}\,\frac{a}{x}$$
асимптотой служитъ абсциссъ.

Изслѣдованіе функцій.

100. Изслѣдованіе измѣненія функціи f(x) ведется обыкновенно по такому плану:

1) Опредѣляютъ тѣ области, въ которыхъ функція и ея производныя дѣйствительны.

2) Опредѣляютъ тѣ значенія x, при которыхъ происходятъ разрывы функціи и ея производной.

3) Опредѣляютъ тѣ значенія x, при которыхъ производная обращается въ 0.

4) Всѣ найденныя значенія x располагаютъ въ строку—въ порядкѣ ихъ возрастанія, и дѣлятъ такимъ образомъ весь интервалъ измѣненія функціи на рядъ частныхъ интерваловъ.

5) Въ каждомъ изъ этихъ частныхъ интерваловъ, въ которомъ функція и ея производная непрерывны, опредѣляютъ знакъ производной и судятъ по немъ о возрастаніи или убываніи функціи, о ея maximum'ахъ и minimum'ахъ.

6) Опредѣляютъ частныя и предѣльныя значенія функціи, соотвѣтствующія найденнымъ значеніямъ x.

7) Опредѣляютъ тѣ значенія x, при которыхъ:
$$f(x)=0;$$
опредѣляютъ f(0).

*) Оно получается изъ разности y^2-Y^2.

8) Разыскиваютъ асимптомы кривой, уравненіе которой есть $y=f(x)$.

9) Опредѣляютъ области той или другой вогнутости кривой и точки перегиба.

10) На основаніи всѣхъ полученныхъ данныхъ, которыя сводятъ въ таблицу, строятъ графикъ функціи.

100bis. Построеніе графика иногда упрощается, если имѣть въ виду слѣдующія замѣчанія *):

1) Если, отъ замѣны x на—x, y замѣнится на—y, то кривая симметрична относительно начала координатъ, которое служитъ центромъ кривой, ибо каждой точкѣ (x, y) кривой соотвѣтствуетъ точка (—x,—y) той же кривой.

Примѣръ: $y=x+\mathrm{Sin}\,x$

2) Если, при замѣнѣ x на—x, y не измѣняется, то кривая симметрична относительно оси ординатъ.

Примѣръ: $y=x^2+\mathrm{Sin}^2x$.

Примѣры изслѣдованія функцій.

101. Примѣръ 1-й.

$$y=f(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+1;$$
$$y'=f'(x)=4x^3-6x^2-6x+4;$$
$$y''=f''(x)=12x^2-12x-6.$$

x	$-\infty$		-1	$-0{,}4$		$\frac{1}{2}$	1	1,4	2		$+\infty$
y′		—	0		+	0		—	0	+	
y	$+\infty$	↘	min		↗	max		↘	min	→	$+\infty$
y″		+ ∪		Точка перегиба.	— ∩	— ∩		Точка перегиба.		+ ∪	

*) Предполагается, что уравненіе кривой дано подъ видомъ: $y=f(x)$, гдѣ $f(x)$ однозначная функція. Если $y=\mp f(x)$, то кривая симметрична относительно оси абсциссъ.

Къ этой таблицѣ присоединимъ нижеслѣдующія **замѣчанія:**

1) Знакъ f(x) при $x = \pm\infty$ усматривается изъ слѣдующаго преобразованія:

$$f(x) = x^4\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right),$$

имѣя въ виду, что второй множитель, при безграничномъ возрастаніи абсолютной величины x, стремится къ 1.

Также опредѣляются и знаки $f'(x)$ при $x = \pm\infty$.

2) Корни уравненія:

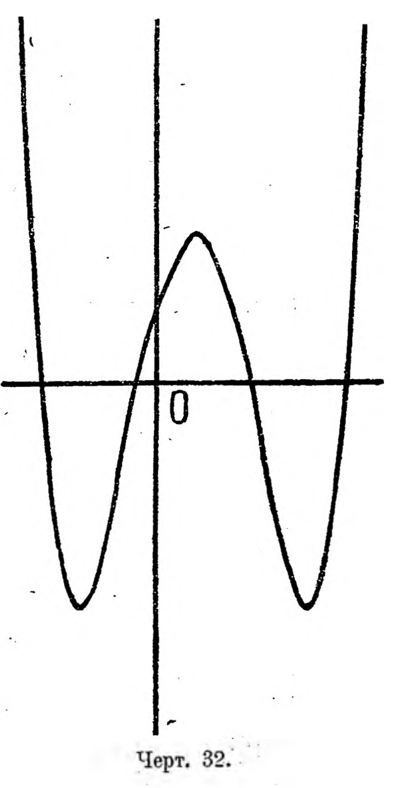
$$f(x) = 0,$$

опредѣляются по приближенію *), имѣя въ виду, что:

$$\begin{array}{llll} f(-3) = +97 & \text{и} & f(-2) = +13 \\ f(-1) = -\ 3 & \text{и} & f(0) \ = +\ 1 \\ f(1) \ = +\ 1 & \text{и} & f(2) \ = -\ 3 \\ f(2) \ = -\ 3 & \text{и} & f(3) \ = +13 \end{array}$$

Эти корни не вошли въ таблицу во избѣжаніе пестроты ея.

3) Такъ какъ: $f'(-\infty) = -\infty$, то въ интервалѣ $(-\infty, -1)$ $f'(x)$ все время отрицательна; знакъ $f'(x)$ въ интервалѣ $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ опредѣляется по знаку $f'(0)$; знакъ производной въ интервалѣ $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ опредѣляется по знаку $f'(1)$; знакъ производной въ интервалѣ $(2, +\infty)$ опредѣляется по знаку $f'(3)$ или по знаку $f'(+\infty)$,



Черт. 32.

4) имѣются двѣ точки перегиба при:

$$x = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right) = 1{,}4 \ \left(\text{съ точн. до } \frac{1}{10}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}\right) = -0{,}4 \ \left(\text{съ точн. до } \frac{1}{10}\right)$$

Въ таблицѣ вогнутость въ сторону полож. оси ординатъ указана знакомъ $\cup$, а вогнутость въ сторону отр. оси ординатъ знакомъ $\cap$.

Результаты изслѣдованія функціи выражены чертежомъ (черт. 32) **).

---

*) Они могутъ быть опредѣлены точно, если уравненіе представить подъ видомъ:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^4 - \frac{9}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{33}{16} = 0$$

**) Имѣетъ ли кривая чертежа 32 ось симметріи?

102. Примѣръ 2-ой. $y=f(x)=\frac{x^2+1}{4x-3}$;

$$y'=f'(x)=\frac{2(2x^2-3x-2)}{(4x-3)^2}.$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		2		$+\infty$
y′		+	0	−		−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{4}$ max.	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	1 min.	↗	$+\infty$

Замѣчанія:

1) $f(x)$ и $f'(x)$ разрываются при $x=\frac{3}{4}$.

2) Для опредѣленія $f(\infty)$ употребляемъ слѣдующее преобразованіе:

$$f(x)=\frac{x+\frac{1}{x}}{4-\frac{3}{x}},$$

изъ котораго усматриваемъ, что, съ безграничнымъ увеличеніемъ x по абсолютной величинѣ, $f(x)$ тоже безгранично увеличивается по абс. величинѣ, сохраняя знакъ x.

3) Кривая, выражаемая даннымъ уравненіемъ (гипербола), имѣетъ двѣ асимптомы:

$$x=\frac{3}{4}$$

и

$$y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{16}.$$

Въ существованіи послѣдней убѣждаемся, представивъ уравненіе кривой, подъ видомъ:

$$y=\frac{x}{4}+\frac{3}{16}+\frac{25}{16(4x-3)}.$$

Результаты изслѣдованія данной функціи выражены черт. 33 *). Предлагаемъ читателю дополнить ихъ изслѣдованіемъ $f''(x)$.

---

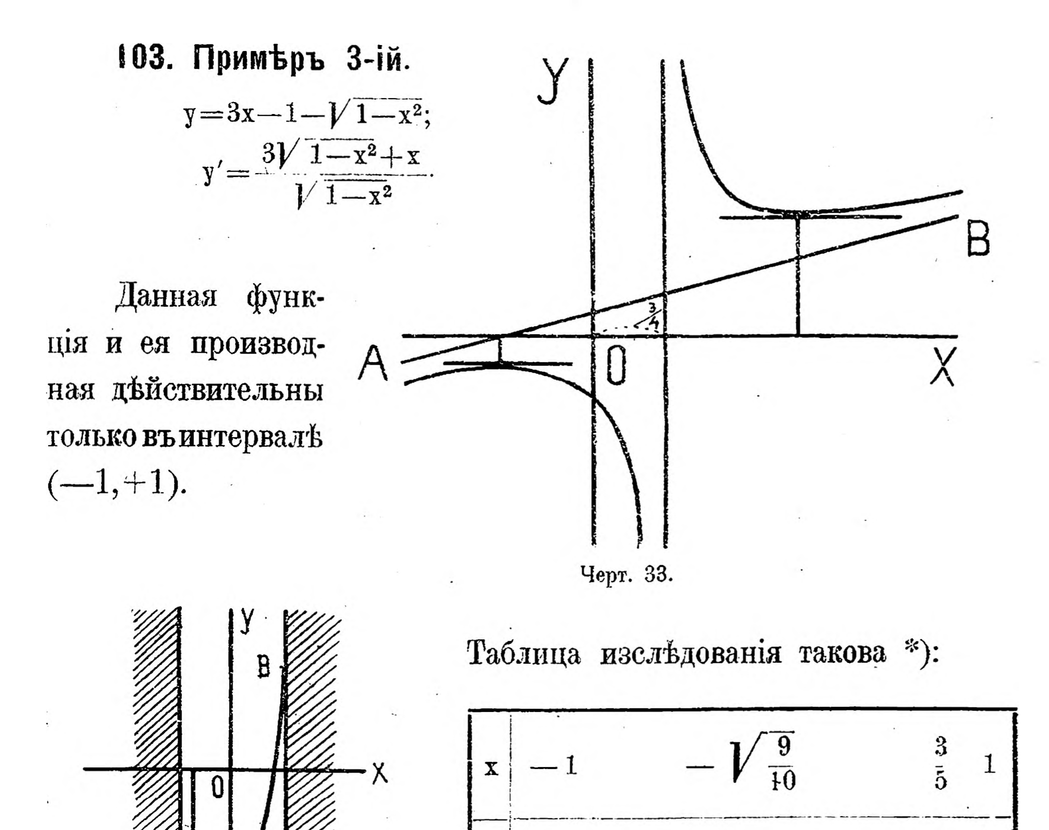
*) Въ этомъ чертежѣ есть погрѣшности со стороны масштаба. Просимъ читателя обнаружить ихъ и исправить.

103. Примѣръ 3-ій.

$$y=3x-1-\sqrt{1-x^2};$$

$$y'=\frac{3\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Данная функція и ея производная дѣйствительны только въ интервалѣ $(-1,+1)$.



Черт. 33.

Черт. 34.

Таблица изслѣдованія такова *):

x	-1		$-\sqrt{\frac{9}{10}}$		$\frac{3}{5}$		1
y′		$-$	0	$+$			
y	-4	↘	$-(1+\sqrt{10})$ min		0	→	2

Наибольшее значеніе функціи есть 2, а наименьшее, совпадающее съ minimum'омъ, равно:

$$-(1+\sqrt{10}).$$

Черт. 34 изображаетъ измѣненіе функціи. Заштрихованы тѣ области плоскости, куда кривая (дуга эллипса) не проникаетъ.

---

*) Радикалъ $\sqrt{1-x^2}$ считается существенно положительнымъ, поэтому $x=+\sqrt{\frac{9}{10}}$ не есть корень y'.

Для опредѣленія знака y' въ интервалѣ $\left(-1,-\sqrt{\frac{9}{10}}\right)$ можно положить $x=-\sqrt{0{,}99}$

104. Примѣръ 4-ый.

$$y=f(x)=2\ \mathrm{Sin}\,x-\mathrm{tg}\,x.$$

Періодъ измѣненія данной функціи есть 2π; поэтому достаточно изслѣдовать функцію въ интервалѣ $(0,2\pi)$.

$f(x)$ разрывается при: $x=\frac{\pi}{2}$ и $x=\frac{3\pi}{2}$;

$$y'=f'(x)=2\ \mathrm{Cos}\,x-\frac{1}{\mathrm{Cos}^2x}=\frac{2\ \mathrm{Cos}^3x-1}{\mathrm{Cos}^2x}.$$

Производная разрывается при тѣхъ же значеніяхъ x, какъ и $f(x)$, и обращается въ 0 при $x=\alpha_1$, гдѣ:

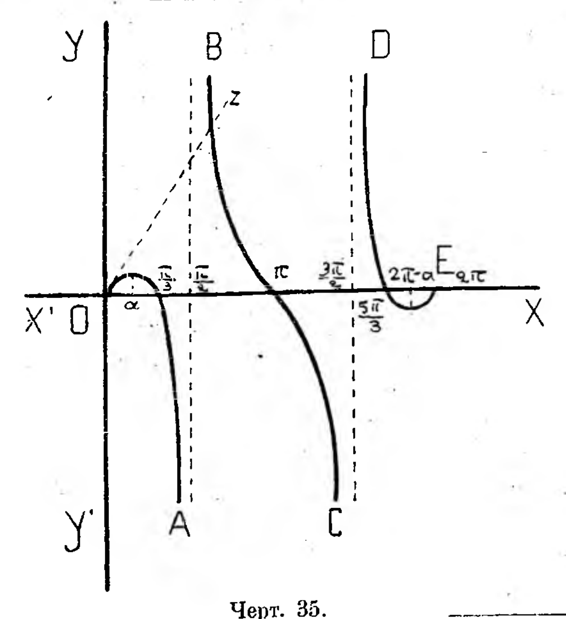
$$\mathrm{Cos}\,\alpha_1=\sqrt[3]{\frac{1}{2}},$$

и очевидно: $\alpha_1<\frac{\pi}{3}$.

Кромѣ того, въ интервалѣ $(0,2\pi)$ производная обращается въ 0 при: $x=\alpha_2$, гдѣ $\alpha_2=2\pi-\alpha_1$.

Таблица изслѣдованія такова:

x	0	α_1	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	α_2	2π
y'	1 +	0	−		−		−	0	+
y	0 ↗	M maximum	0 ↘ $-\infty$	$+\infty$	0 ↘	$-\infty$	∞ ↘ 0	m minimum	↗ 0
y''	0 точка перег.		− ∩	+ ∪	0 точка перег.	− ∪		+ ∪	0 точка перег.



Черт. 35.

Максимумъ M и минимумъ m функціи опредѣляются такъ:

$$M=\sqrt{\frac{(2-\sqrt[3]{2})^3}{2}}$$

$$m=-\sqrt{\frac{(2-\sqrt[3]{2})^3}{2}}$$

Графикъ функціи изображенъ на чертежѣ 35.

Опредѣленіе функціи по ея производной.

105. До сихъ поръ мы занимались рѣшеніемъ такого вопроса: по данной функціи найти ея производную. Теперь поставимъ себѣ обратный вопросъ: **дана нѣкоторая функція $f(x)$ и спрашивается, какова та функція $\Phi(x)$, производная которой равна $f(x)$. Функція $\Phi(x)$ называется первообразной относительно $f(x)$.**

Въ простыхъ случаяхъ первообразная функція усматривается непосредственно. Напримѣръ,

если: $f(x)=x$,

то: $\Phi(x)=\frac{x^2}{2}$,

п. ч.: $\Phi'(x)=x$;

если: $f(x)=\operatorname{Cos} x$,

то: $\Phi(x)=\operatorname{Sin} x$.

Однако очевидно, и на это обстоятельство уже было обращено вниманіе (56), что за первообразную функцію въ первомъ примѣрѣ мы могли бы принять не только $\frac{x^2}{2}$, но вообще $\frac{x^2}{2}+C$, гдѣ C произв. постоянное, п. ч.:

$$\left(\frac{x^2}{2}+C\right)'=x;$$

а во второмъ примѣрѣ первообразная функція равна $\operatorname{Sin} x+C$, п. ч.:

$$(\operatorname{Sin} x+C)'=\operatorname{Cos} x.$$

И, вообще, **если $\Phi(x)$ есть какая-нибудь первообразная функція** относительно $f(x)$, такъ что:

$$\Phi'(x)=f(x),$$

то и функція $\Phi(x)+C$, гдѣ C произвольное постоянное, **есть также первообразная относительно $f(x)$, ибо:**

$$(\Phi(x)+C)'=\Phi'(x)=f(x).$$

106. Теперь умѣстно отвѣтить на вопросъ, поставленный въ § 56: не существуетъ ли еще какой-либо другой функціи $F(x)$, отличной отъ $\Phi(x)$, которая тоже будетъ первообразной относительно $f(x)$. Допустимъ, что такая функція $F(x)$ существуетъ. Тогда:

$$F'(x)=f(x),$$

Но и: $\Phi'(x)=f(x)$

Поэтому: $F'(x)=\Phi'(x)$

$$F'(x)-\Phi'(x)=[F(x)-\Phi(x)]'=0.$$

Слѣдовательно: $F(x)-\Phi(x)=C$.

и $F(x)=\Phi(x)+C$.

Отсюда ясно, что если Ф(x) есть одна изъ первообразныхъ функцій относительно f(x), то **всѣ другія первообразныя функціи относительно f(x) выражаются такъ:**

$$\Phi(x)+C.$$

Иного типа первообразныхъ функцій относительно f(x) не существуетъ.

107. Вышеприведенные примѣры убѣдили насъ въ томъ, что **первообразныя функціи** иногда существуютъ. Но **существуютъ ли** онѣ **вообще?** Отвѣтимъ на этотъ вопросъ слѣдующей теоремой.

Теорема. Пусть дана функція f(x), непрерывная въ разсматриваемомъ интервалѣ. Построимъ въ этомъ интервалѣ кривую, заданную уравненіемъ:

$$y=f(x), \qquad \text{(черт. 36)}$$

и разсмотримъ площадь ABDC (см. черт. 36), предполагая:

$$OA=a$$
$$\text{и } OC=x.$$

Эта перемѣнная площадь, измѣняющаяся съ измѣненіемъ x, есть нѣкоторая функція Ф(x).

Черт. 36.

Докажемъ, что производная функціи Ф(x) равна данной функціи f(x), т.-е.

$$\Phi'(x)=f(x).$$

Съ этою цѣлью дадимъ x положительное приращеніе h, тогда:

$$\Phi(x+h)=ABFE$$

и слѣдовательно:

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=CDFE$$
$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\frac{CDFE}{h}$$

и поэтому:
$$\Phi'(x)=\underset{h\to 0}{\text{пред.}}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\underset{h\to 0}{\text{пр.}}\frac{CDFE}{h}.$$

Займемся теперь отношеніемъ: $\frac{CDFE}{h}$

и прежде всего замѣтимъ, что приращеніе h можетъ быть взято на столько малымъ, что ординаты дуги DF на всемъ пространствѣ ея или постоянно увеличиваются или постоянно уменьшаются (на черт. 36 представленъ 1-й случай; второй разбирается также). При такихъ условіяхъ площадь CDFE очевидно больше площади

внутренняго прямоугольника (см. черт. 36), и меньше площади внѣшняго, т.-е.

$$hf(x+h) > CDFE > hf(x)$$

или:

$$f(x+h) > \frac{CDFE}{h} > f(x).$$

Но:

$$\text{пред.}_{h \to 0}\ f(x+h) = f(x).$$

Поэтому:

$$\Phi'(x) = \text{пред.}_{h \to 0} \frac{CDFE}{h} = f(x), \text{ ч. и т. д.}$$

Эта теорема доказываетъ существованіе первообразной относительно всякой непрерывной въ извѣстномъ интервалѣ функціи $f(x)$: **площадь, построенная вышеуказаннымъ образомъ, есть искомая первообразная функція.**

108. Изъ предыдущаго отнюдь не слѣдуетъ, что первообразная функція $\Phi(x)$ имѣетъ единственное значеніе площ. ABDC: если бы мы за начальную ординату приняли не AB, а A′B′, то повторяя прежнія разсужденія, убѣдились бы, что производная площади A′B′DC есть тоже $f(x)$. Слѣдовательно, площадь A′B′DC есть новая первообразная функція, отличающаяся отъ прежней ABDC на постоянную площадь A′B′BA, которую можно обозначить постояннымъ числомъ C (см. 98).

Разумѣется, это C для каждой опредѣленной площади имѣетъ совершенно опредѣленное значеніе. Если, напримѣръ, данная функція $f(x)$ есть $3x^2$, то площадь ABDC есть такая $\Phi(x)$, производная которой равна $3x^2$. Не трудно сообразить, что въ данномъ случаѣ $\Phi(x) = x^3 + C$, ибо $(x^3+C)' = 3x^2$.

Однако, спрашивается, чему же равно C, если, напримѣръ, $OA = a$. Очевидно, что C въ этомъ случаѣ должно имѣть совершенно опредѣленное значеніе, ибо опредѣленной площади отвѣчаетъ опредѣленное число. Для опредѣленія C разсуждаемъ такъ:

Если x сдѣлается равнымъ a, то ординаты AB и CD совпадутъ, и площадь ABDC обратится въ 0.

Поэтому:

$$(x^3 + C)_{x=a} = 0.$$

т.-е.:

$$a^3 + C = 0.$$

Слѣдовательно:

$$C = -a^3.$$

Значитъ, интересующая насъ **площадь выражается числомъ:**

$$x^3 - a^3 = \Phi(x) - \Phi(a),$$

т.-е. разностью двухъ значеній первообразной функціи при конечномъ и начальномъ значеніи независимаго перемѣннаго.

109. Разысканіе первообразныхъ функцій чрезвычайно важно, ибо оно даетъ средство для вычисленія площадей, объемовъ и пр.

Это разысканіе облегчается употребленіемъ особаго рода обозначеній, введенныхъ **Лейбницемъ**, къ изученію которыхъ мы теперь и перейдемъ.

Дифференціалъ функціи. Выраженіе приращенія функціи черезъ ея производную.

110. Изъ выраженія производной:

$$\text{пр.} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}_{h \to 0} = f'(x)$$

заключаемъ, что перемѣнное число:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

при безконечно-маломъ h, равно своему предѣлу $f'(x)$, сложенному (алгебраически) съ нѣкоторымъ безконечно-малымъ числомъ ε, т.-е.:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)+\varepsilon.$$

Отсюда:

$$f(x+h)-f(x) = hf'(x)+h\varepsilon.$$

Такъ выражается приращеніе функціи черезъ ея производную, которая, конечно, предполагается для разсматриваемыхъ значеній x конечной. Разсмотримъ подробнѣе это приращеніе функціи. Оно состоитъ изъ двухъ членовъ, и каждый изъ нихъ, при h безконечно-маломъ, есть число безконечно-малое. Слѣдовательно, и **полное приращеніе функціи есть число безконечно-малое.**

Далѣе: порядокъ второго члена $h\varepsilon$ выше порядка перваго члена $hf'(x)$, п. ч.:

$$\frac{h\varepsilon}{hf'(x)} = \frac{\varepsilon}{f'(x)} = \text{б. м. ч.*)}$$

Поэтому **членъ $hf'(x)$ является главною частью приращенія функціи;** онъ отличается отъ полнаго приращенія функціи на безк.-малое число порядка высшаго, чѣмъ порядокъ его самого.

Полное приращеніе функціи и главная часть его суть эквивалентныя б.-м. числа (20). Дѣйствительно:

$$\text{пр.} \frac{hf'(x)+h\varepsilon}{hf'(x)}_{h \to 0} = \text{пр.}\left(1+\frac{\varepsilon}{f'(x)}\right)_{h \to 0} = 1.$$

Поэтому, при выполненіи условій теоремъ, изложенныхъ на страницахъ 16 и 18, **полное безк.-малое приращеніе функціи можно замѣнять главнымъ членомъ приращенія.**

---

*) Мы предполагаемъ, что $f'(x) \neq 0$.

Главный членъ приращенія функціи f(x) называется дифференціаломъ функціи и обозначается такъ:

$$df(x).$$

Поэтому: $df(x)=f'(x)\,h$. . . . . (M)

Если: $f(x)=x$,

то изъ послѣдняго равенства получимъ:

$$dx=(x)'\,h=h.$$

Слѣдовательно, при принятыхъ нами обозначеніяхъ, является новое обозначеніе dx для приращенія h независимаго перемѣннаго, и надо совершенно отчетливо помнить, **что dx есть безконечно—малое приращеніе независимаго перемѣннаго, не зависящее отъ x***).

Написавъ въ равенствѣ (M) dx вмѣсто h, получимъ:

$$df(x)=f'(x)\,dx.$$

Отсюда: $f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$,

или, полагая: $f(x)=y$,

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}.$$

Такимъ образомъ получается новое обозначеніе производной.

111. Итакъ:

1) Дифференціалъ функціи f(x) есть произведеніе производной этой функціи f'(x) на дифференціалъ независимаго перемѣннаго x, т.-е.:

$$df(x)=f'(x)\,dx$$

2) Дифференціалъ функціи есть главная часть полнаго приращенія функціи. Полное приращеніе функціи, при безк.-маломъ приращеніи независимаго перемѣннаго, и диффер. функціи суть эквивалентныя безк.-мал. числа.

3) Производная функція выражается отношеніемъ дифференціала этой функціи къ дифференціалу независимаго перемѣннаго.

Дифференцированіе функцій.

112. Дифференцировать данную функцію F(x) значитъ найти ее дифференціалъ.

Такъ какъ: $dF(x)=F'(x)\,dx$,

а F'(x) мы найти умѣемъ, то, слѣдовательно, найдемъ и дифференціалъ функціи.

Найдемъ, напримѣръ: $d(3x^2+\operatorname{Sin}x)$.

Ищемъ сначала $(3x^2+\operatorname{Sin}x)'$:

$$(3x^2+\operatorname{Sin}x)'=6x+\operatorname{Cos}x.$$

---

*) п. ч. h не зависитъ отъ x.

Найденную производную умножаемъ на dx и получаемъ:

$$d(3x^2+\sin x)=(6x+\cos x)\,dx.$$

113. Всѣ теоремы, касающіяся производной суммы, произведенія, частнаго и пр. функцій, справедливы и для дифференціаловъ функцій.

Напримѣръ, умноживъ обѣ части равенства:

$$\left[f(x)\,\varphi(x)\right]'=f'(x)\,\varphi(x)+\varphi'(x)\,.\,f(x)$$

на dx получимъ:

$$\left[f(x)\,.\,\varphi(x)\right]'dx=\left[f'(x)\,.\,dx\right].\,\varphi(x)+\left[\varphi'(x)\,.\,dx\right]f(x).$$

Теперь, имѣя въ виду, что произведеніе производной функціи на dx есть дифференціалъ этой функціи, перепишемъ послѣднее равенство такъ:

$$d\left[f(x)\,.\,\varphi(x)\right]=\varphi(x)\,df(x)+f(x)\,d\varphi(x)$$

и прочтемъ его слѣдующимъ образомъ: дифференціалъ произведенія двухъ функцій равенъ суммѣ произведеній дифференціала одной изъ функцій на другую.

Разсмотримъ еще, какъ выражается дифференціалъ сложной функціи (60).

Какъ извѣстно, производная функціи $\Phi(y)$, гдѣ $y=f(x)$, выражается такъ:

$$\Phi'_x(y)=\Phi'_y(y)\,.\,f'_x(x).$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на dx, получимъ:

$$\Phi'_x(y)\,.\,dx=\Phi'_y(y)\,.\,f'(x)\,dx.$$

Но:

$$\Phi'_x(y)\,.\,dx=d\Phi_x(y)$$
$$f'_x(x)\,.\,dx=df_x(x).$$

Поэтому окончательноі

$$d_x\,\Phi(y)=\Phi'_y(y)\,.\,d_x y.$$

Примѣръ.

Найти: $d(\sin y)$,

гдѣ $y=x^2$.

По предыдущей формулѣ:

$$d\sin y=\cos y\,.\,dy.$$

Мы пропускаемъ значки, т. к. недоразумѣній не можетъ быть.

Далѣе:

$$dy=dx^2=2x\,dx$$

и потому: $d(\sin y)=\cos y\,(2x\,dx)=2x\,dx\cos x^2.$

Преимущества дифференціальнаго обозначенія.

114. Производная нѣкоторой функціи $\Phi(y)$ выражается, какъ мы знаемъ, различно, въ зависимости отъ того, будетъ ли y независимое перемѣнное число или нѣкоторая функція отъ x.

Въ первомъ случаѣ производная обозначится такъ:

$$\Phi'(y),$$

а во второмъ:

$$\Phi'(y)\,y'.$$

Если же воспользоваться дифференціальнымъ обозначеніемъ, то въ первомъ случаѣ будетъ:

$$d\Phi(y)=\Phi'(y)\,dy$$

а во второмъ то же самое (106):

$$d\Phi(y)=\Phi'(y)\,dy.$$

Слѣдовательно, дифференціальное обозначеніе объединяетъ въ одной общей формулѣ какъ тотъ случай, когда y есть функція отъ x, такъ и тотъ случай, когда y есть независимое перемѣнное; это — важное преимущество диффер. обозначенія.

Оно имѣетъ мѣсто и въ слѣдующемъ случаѣ:

Мы видѣли, что если y есть функція независимаго перемѣннаго x, то:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}.$$

Покажемъ теперь, что такое же равенство будетъ имѣть мѣсто и въ томъ случаѣ, когда y и x суть функціи одного и того же перемѣннаго числа t.

Пусть:

$$y=\varphi(t)$$
$$x=\psi(t).$$

Въ такомъ случаѣ (61^{bis}):

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t};$$

но:

$$\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{y'_t\,dt}{x'_t\,dt}=\frac{d_t y}{d_t x},$$

и, значитъ, формула:

$$y'=\frac{dy}{dx}$$

справедлива какъ въ томъ случаѣ, когда x независимое перемѣнное, такъ и въ томъ случаѣ, когда x и y являются функціями одного и того же перемѣннаго.

Вышеуказанныя важныя преимущества дифференціальнаго обозначенія объясняютъ исключительное пользованіе имъ при разысканіи первообразныхъ функцій.

....

Неопредѣленный интегралъ.

115. Первообразной функціей относительно функціи f(x) мы назвали такую функцію Φ(x), производная которой равна f(x). Мы можемъ теперь выразиться иначе, мы можемъ сказать, что первообразная функція относительно данной есть такая функція, дифференціалъ которой равенъ данному дифференціалу f(x)dx*), т.-е.:

$$d\Phi(x) = f(x)\,dx.$$

Первообразная функція называется также неопредѣленнымъ интеграломъ, — неопредѣленнымъ — вслѣдствіе присутствія произвольнаго постояннаго числа (98). Для обозначенія неопредѣленнаго интеграла отъ даннаго дифференціала f(x)dx [или первообразной функціи относительно f(x)] употребляется знакъ $\int$, называемый знакомъ интеграла.

Слѣдовательно, символъ:

$$\int f(x)\,dx$$

означаетъ первообразную функцію Φ(x) относительно f(x) или, говоря иначе, такую функцію, дифференціалъ которой равенъ f(x)dx. Такихъ функцій, какъ мы знаемъ существуетъ безчисленное множество, и онѣ отличаются одна отъ другой значеніями произвольныхъ постоянныхъ.

Напримѣръ:

$$\int 3x^2dx = x^3 + C,$$

потому что: $(x^3+C)' = 3x^2$

или: $d(x^3+C) = 3x^2dx.$

Отысканіе Φ(x) по данной f(x) называется интегрированіемъ функціи, f(x), а f(x) называется подъинтегральною функціей.

Согласно данному опредѣленію:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

или: $$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Слѣдовательно, **дѣйствіе дифференцированія уничтожаетъ дѣйствіе интегрированія.**

---

*) Выраженія вида f(x)dx называются дифференціалами.

Основныя свойства интеграла.

116. Интегралъ алгебр. суммы конечнаго числа функцій равенъ алгебраической суммѣ интеграловъ слагаемыхъ функцій, т.-е.:

$$\int [f(x)+\varphi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; (K)$$

Это равенство справедливо, п. ч. производная второй части его равна подъинтегральной функціи $f(x)+\varphi(x)$. Дѣйствительно:

$$\left[\int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx\right]' = \left[\int f(x)\,dx\right]' + \left[\int \varphi(x)\,dx\right]' = f(x)+\varphi(x).$$

Замѣтимъ еще слѣдующее: первая часть равенства (K) содержитъ одно произвольное постоянное число C_1, а вторая часть— два произвольныхъ постоянныхъ C_2 и C_3, и эти произвольныя постоянныя должны быть выбраны такъ, чтобы:

$$C_1 = C_2 + C_3.$$

Примѣръ.

$$\int (5x^4+2x)\,dx = x^5+x^2+C_1;\ ^{*)}$$

$$\int 5x^4\,dx = x^5+C_2;$$

$$\int 2x\,dx = x^2+C_3;$$

$$x^5+x^2+C_1 = x^5+x^2+C_2+C_3$$

при условіи, что: $C_2+C_3=C_1$.

117. Постоянный множитель, находящійся подъ знакомъ интеграла, можетъ быть вынесенъ за знакъ интеграла, т.-е.:

$$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx.$$

Теорема эта доказывается совершенно такъ же, какъ и предыдущая, и предполагаетъ ту же оговорку относительно постоянныхъ чиселъ, входящихъ въ составъ интеграловъ.

*) Ибо $d\,(x^5+x^2+C_1)=(5x^4+2x)\,dx$

Простѣйшіе пріемы разысканія неопредѣленнаго интеграла.

118. Изъ формулъ для производныхъ простѣйшихъ функцій вытекаютъ слѣдующія формулы для интеграловъ, провѣряемыя сличеніемъ производной второй части равенства съ подъинтегральной функціей.

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \lg_e x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\lg_e a} + C$$

$$\int \operatorname{Sin} x dx = -\operatorname{Cos} x + C$$

$$\int \operatorname{Cos} x dx = \operatorname{Sin} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{Cos}^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{Sin}^2 x} = -\operatorname{Cotg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

Три пріема разысканія интеграловъ.
Разложеніе на слагаемыя.

119. Этотъ пріемъ заключается въ томъ, что подъинтегральную функцію разлагаютъ на такія слагаемыя, интегрировать которыя умѣютъ.

Примѣръ 1-й.

$$\int (a x^4 + bx^3 + cx^2 + kx + e)\, dx = \int a x^4 dx + \int bx^3 dx + \int cx^2 dx + \int kx\, dx + \int e\, dx = \frac{a x^5}{5} + \frac{bx^4}{4} + \frac{cx^3}{3} + \frac{kx^2}{2} + ex + C.$$

Примѣръ 2-й.

$$\int (x^2 + \sqrt[3]{x^2})\, dx = \int x^2 dx + \int x^{2/3} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^{5/3}}{5} + C.$$

Примѣръ 3-й.

$$\int \frac{1+x^2}{x} dx = \int \frac{dx}{x} + \int x dx = \lg_e x + \frac{x^2}{2} + C.$$

Введеніе новаго перемѣннаго.

120. Иногда, вслѣдствіе удачнаго введенія новаго перемѣннаго, данный дифференціалъ измѣняется въ такой, интегралъ котораго мы найти сумѣемъ.

Примѣръ 1-й. $$\int \frac{dx}{3x+5}.$$

Полагая: $y=3x+5$,

находимъ: $dy=3dx$,

и потому: $$\int \frac{dx}{3x+5}=\frac{1}{3}\int \frac{dy}{y}=\frac{1}{3}\lg_e y+C=\frac{1}{3}\lg_e(3x+5)+C.$$

Примѣръ 2-й.

$$\int \frac{dx}{1+(x+3)^2}.$$

Полагая $y=x+3$, находимъ $dx=dy$ и, слѣдовательно:

$$\int \frac{dx}{1+(x+3)^2}=\int \frac{dy}{1+y^2}=\operatorname{arctg} y+C=$$
$$=\operatorname{arctg}(x+3)+C.$$

Примѣръ 3-й.

$$\int \operatorname{tg} x dx=\int \frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x} dx.$$

Полагая $y=\operatorname{Cos} x$, находимъ $dy=-\operatorname{Sin} x dx$, и потому:

$$\int \operatorname{tg} x dx=-\int \frac{dy}{y}=-\lg_e \operatorname{Cos} x+C.$$

Въ подобныхъ простыхъ примѣрахъ надо подстановку производить **«въ воздухѣ»**, прямо соображая, что числитель есть взятый съ обратнымъ знакомъ дифференціалъ знаменателя.

Примѣръ 4-й.

$$\int \operatorname{Sin} x.\ \operatorname{Cos} x dx=\int \operatorname{Sin}^2 x.d\ \operatorname{Sin} x=\frac{\operatorname{Sin}^3 x}{3}+C.$$

Примѣръ 5-й.

$$\int x\sqrt[5]{a^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int (a^2-x^2)^{1/5}d(a^2-x^2)=-\frac{5}{12}\sqrt[5]{(a^2-x^2)^6}+C.$$

Примѣръ 6-й.

$$\int \frac{3x-2}{4x^2+1}dx=3\int \frac{xdx}{4x^2+1}-\int \frac{2dx}{4x^2+1}=\frac{3}{8}\int \frac{d(4x^2+1)}{4x^2+1}-\int \frac{d(2x)}{(2x)^2+1}=$$
$$=\frac{3}{8}\lg_e(4x^2+1)-\operatorname{arctg} 2x.+C.$$

Интегрированіе по частямъ.

121. Иногда при разысканіи:

$$\int f(x)\,dx$$

удается замѣнить данный дифференціалъ $f(x)\,dx$ произведеніемъ udv, гдѣ u и v суть функціи x. Въ такомъ случаѣ для преобра-

зованія даннаго интеграла можно воспользоваться формулой, опредѣляющей дифференціалъ произведенія:

$$d(uv) = udv + vdu,$$

изъ которой получается:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Удача этого способа зависитъ отъ такого выбора множителей, при которомъ мы сумѣемъ найти $\int vdu$.

Примѣръ 1-й.

$$\int x \operatorname{Cos} x dx = \int \underbrace{x}_{u} d\underbrace{(\operatorname{Sin} x)}_{v} =$$

$$= x \operatorname{Sin} x - \int \operatorname{Sin} x dx = x \operatorname{Sin} x + \operatorname{Cos} x + C.$$

Примѣръ 2-й.

$$\int x \lg_e x . dx = \int \underbrace{\lg_e x}_{u} . d\underbrace{\left[\frac{x^2}{2}\right]}_{v} = \frac{x^2 \lg_e x}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2 \lg_e x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

Примѣръ 3-й.

$$\int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u} \underbrace{dx}_{v} = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \lg_e (1+x^2) + C =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \lg_e \sqrt{1+x^2} + C.$$

Опредѣленный интегралъ.

122. Неопредѣленный интегралъ подчиняется, какъ мы знаемъ, тому единственному условію, что производная его равна подъинтегральной функціи. Значитъ если:

$$\int f(x) dx = \Phi(x) + C,$$

то:

$$\Big[\Phi(x) + C\Big]' = f(x).$$

Подчинимъ теперь неопредѣленный интегралъ еще другому условію, — именно потребуемъ, чтобы, при $x = a$, онъ обратился въ 0. Это условіе опредѣляетъ значеніе произвольнаго постояннаго числа, п. ч. изъ требованія:

$$\Big[\Phi(x) + C\Big]_{x=a} = 0,$$

получается:

$$\Phi(a) + C = 0$$

или:

$$C = -\Phi(a).$$

Такимъ образомъ интегралъ, удовлетворяющій этому добавочному требованію, выражается такъ:

$$\Phi(x) - \Phi(a).$$

Такой интегралъ называется опредѣленнымъ и обозначается знакомъ:

$$\int_a^x f(x)\,dx,$$

который читается такъ: опредѣленный интегралъ въ предѣлахъ отъ a до x. Число x называется верхнимъ предѣломъ интеграла, а число a нижнимъ.

Слѣдовательно, **опредѣленный интегралъ** $\int_a^x f(x)\,dx$ **есть такая функція отъ x,** которая опредѣляется слѣдующими условіями:

1) Производная ея по x равна f(x).

2) При x=a функція обращается въ 0.

При этомъ предполагается, что f(x) непрерывна и однозначна въ интервалѣ (a, x).

Изъ сказаннаго ясно, что опредѣленный интегралъ представляетъ собою разность двухъ значеній первообразной функціи относительно f(x), соотвѣтствующихъ верхнему и нижнему предѣламъ интеграла.

Если верхній предѣлъ интеграла равенъ тоже постоянному числу b, то интегралъ: $\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$ обращается въ пост. число:

Примѣры:

$$\int_1^x 4x^3 = (x^4)_{x=x} - (x^4)_{x=1} = x^4 - 1;$$

$$\int_1^2 4^3 = 15.$$

123. Можетъ возникнуть вопросъ, **зачѣмъ вводится понятіе** объ **опредѣленномъ интегралѣ**. На этотъ вопросъ уже былъ данъ отвѣтъ при рѣшеніи частной задачи въ (101). Повторимъ его въ общемъ видѣ. Если дифференціалъ нѣкоторой площади S (см. чертежъ 37), отсчитываемой отъ постоянной ординаты, соотвѣтствующей x=a, равенъ f(x) dx, т.-е.:

$$dS = f(x)\,dx,$$

то функція, опредѣляющая площадь *), выразится неопредѣленнымъ интеграломъ:

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C.$$

*) Мы ограничиваемъ наше разсмотрѣніе случаемъ, когда всѣ ординаты кривой положительны, и $x > a$.

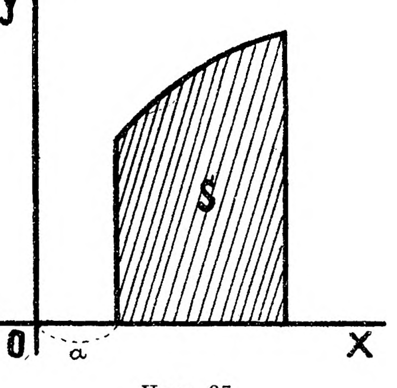
Такъ какъ эта площадь при $x=a$ должна обратиться въ 0, то мы должны наложить на $\Phi(x)+C$ требованіе, чтобы:

$$[\Phi(x)+C]=0. \qquad x=a.$$

Отсюда: $$C=-\Phi(a)$$

и $$S=\Phi(x)-\Phi(a)=\int_a^x f(x)\,dx,$$

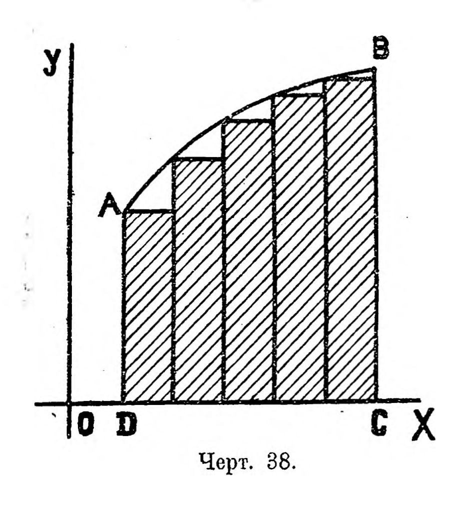
т.-е. приходимъ къ опредѣленному интегралу. Подобное же примѣненіе опредѣленнаго интеграла мы встрѣтимъ и при вычисленіи объемовъ:



Черт. 37.

Опредѣленный интегралъ какъ предѣлъ суммы.

124. Въ (24) на примѣрѣ параболы было показано, что любую площадь ABCD можно разсматривать, какъ (черт. 38-й) предѣлъ суммы вписанныхъ (или описанныхъ) прямоугольниковъ при безграничномъ увеличеніи ихъ числа. Такъ какъ, съ другой стороны, эта площадь выражается опредѣленнымъ интеграломъ, то выходитъ, что опредѣленный интегралъ можно разсматривать какъ предѣлъ суммы, составленной изъ значеній подъинтегральной функціи (ординаты кривой), умноженныхъ на приращенія независимаго перемѣннаго (основанія прямоугольниковъ) при безграничномъ увеличеніи числа слагаемыхъ этой суммы (въ предѣлахъ даннаго интервала DC) *).



Черт. 38.

Находя предѣлы этихъ суммъ, можно, слѣдовательно, вычислять площади и опредѣленные интегралы, но способъ этотъ часто сложенъ, и гораздо болѣе **могущественнымъ средствомъ въ этой области является прямое разысканіе первообразныхъ функцій** (неопредѣленныхъ интеграловъ).

Однако тамъ, гдѣ интегрированіе почему-нибудь невозможно, прибѣгаютъ къ приближенному вычисленію площадей и получаютъ, такимъ образомъ, приближенныя значенія опредѣленныхъ интеграловъ.

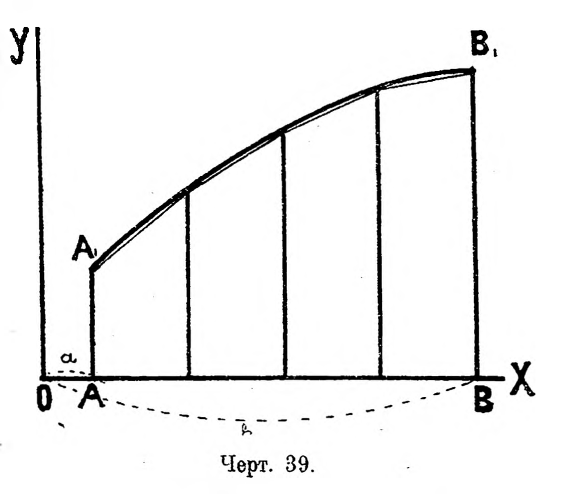
Изъ изложеннаго видно, какая тѣсная связь существуетъ

*) Знакъ $\int$ есть видоизмѣненіе буквы S, начальной въ словѣ Summa.

между вычисленіемъ опредѣленныхъ интеграловъ и вычисленіемъ площадей или, какъ говорятъ, ихъ квадратурою. Поэтому, терминъ «квадратура» перешелъ на интегралы, и если говорятъ, что вопросъ приведенъ къ квадратурамъ, то это значитъ, что вопросъ сводится къ вычисленію интеграловъ.

Приближенная квадратура. Формула П. Л. Чебышева.

125. Для приближеннаго вычисленія площади ABB_1A_1 (черт. 39) дѣлятъ $AB = b - a$ на n равныхъ частей, проводятъ соотвѣтствующія ординаты и хорды и вычисляютъ сумму площадей полученныхъ трапецій, которую и принимаютъ за приближенное значеніе данной площади или соотвѣтствующаго опредѣленнаго интеграла. Если ординаты кривой, соотвѣтствующія точкамъ дѣленія, обозначить, начиная съ AA_1, черезъ:



Черт. 39.

$$y_0,\ y_1 \ . \ . \ . \ y_n,$$

то сумма S площадей всѣхъ трапецій опредѣлится слѣдующимъ выраженіемъ:

$$S = \frac{b-a}{2n}(y_0 + y_1) + \frac{b-a}{2n}(y_1 + y_2) + \ . \ . \ . \ + \frac{b-a}{2n}\left(y_{n-1} + y_n\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ . \ . \ . \ + y_{n-1}\right) \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (K)$$

Нашъ русскій математикъ, **П. Л. Чебышевъ**, далъ очень точную формулу приближенной квадратуры, опредѣливъ только шесть ординатъ кривой. Эти шесть ординатъ соотвѣтствуютъ точкамъ, удаленнымъ отъ середины AB, по ту и другую сторону ея, на разстоянія:

$$0{,}267\,\frac{b-a}{2},\ 0{,}422\,\frac{b-a}{2},\ 0{,}866\,\frac{b-a}{2}.$$

По шести соотвѣтствующимъ ординатамъ:

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ y_6$$

площадь фигуры ABB_1A_1 приближенно выражается слѣдующей формулой:

$$S = \frac{b-a}{6}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6) \ ^{*)}.$$

*) Мы не можемъ привести здѣсь доказательство формулы Чебышева.

Читателю полезно подумать надъ слѣдующими вопросами:

Будетъ ли формула (K) справедлива въ томъ случаѣ, когда ординаты кривой сначала возрастаютъ, а потомъ убываютъ (или обратно)?

Имѣетъ ли вліяніе на формулу (K) то или другое направленіе вогнутости кривой?

Какъ опредѣлить предѣлъ погрѣшности, получаемой при употребленіи формулы (K)?

Примѣръ:

Найти приближенное значенiе интеграла:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

Пользуясь формулой (K), принимая $n=10$ и вычисляя значенiя y съ тремя десятичными знаками, найдемъ:

$$\text{прибл. знач.} \int_1^2 \frac{dx}{x} = 0{,}6936.$$

Замѣтимъ, что данный интегралъ выражаетъ собою $\lg_e 2$. Слѣдовательно, нами найдено приближенное значенiе этого логариѳма, болѣе точная величина котораго выражается слѣдующимъ числомъ: 0,69314718.

Предлагаемъ читателю примѣнить къ данному интегралу формулу Чебышева.

Геометрическiя приложенiя интеграловъ.

Вычисленiе площадей.

126. Какъ было показано выше, площадь S, ограниченная кривою:

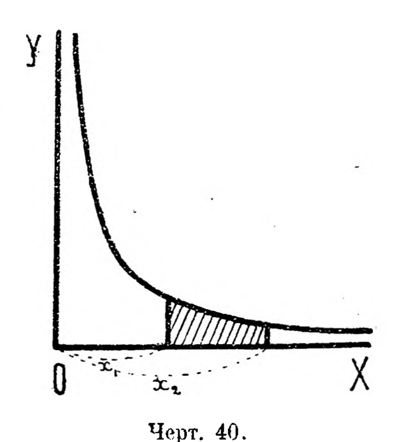
$$y=f(x),$$

двумя ординатами ея, соотвѣтствующими значенiямъ x_1 и x_2 независимаго перемѣннаго, и осью абсциссъ, выражается посредствомъ опредѣленнаго интеграла такъ: $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$. Примѣнимъ эту формулу къ нѣкоторымъ кривымъ.

Площадь сегмента гиперболы, отнесенной къ ея асимптотамъ.

127. Желаемъ опредѣлить заштрихованную площадь S (черт. 40), при чемъ:

$$0A=x_1$$
$$0B=x_2.$$



Черт. 40.

Изъ уравненiя гиперболы: $xy=a^2$

опредѣляемъ y: $y=\frac{a^2}{x}$.

Слѣдовательно: $f(x)=\frac{a^2}{x}$.

и потому:

$$S=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{a^2}{x}\,dx=a^2\lg_e\frac{x_2}{x_1}.$$

Если: $x_1=1$ и $a=1$.

то $S=\lg_e x_2$.

128. Площадь сегмента 0AB параболы, заданной уравненіемъ: $y^2 = 2px$ (черт. 41).

$$f(x) = -\sqrt{2px}$$

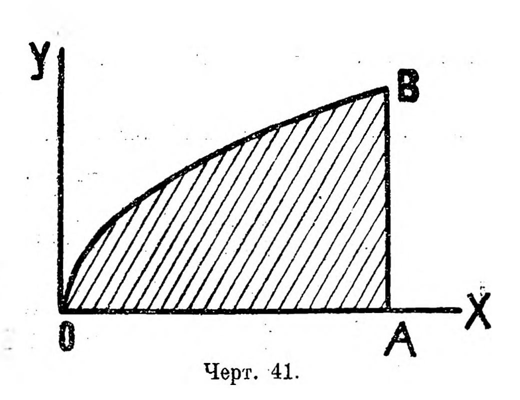
$$S = \int_0^{x_1} \sqrt{2p\,x}\,dx = \sqrt{2p}\int_0^{x_1} x^{1/2}\,dx = {}^2/_3\sqrt{2p}\,.\,x^{3/2} = {}^2/_3\,xy.$$

129. Площадь эллипса, заданнаго уравненіемъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Въ данномъ случаѣ:

$$f(x) = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$



Черт. 41.

Очевидно, что для вычисленія той части площади эллипса, которая расположена между положительными направленіями координатныхъ осей, передъ радикаломъ надо удержать знакъ + и интегрировать въ предѣлахъ отъ 0 до a. Поэтому. площадь S четверти эллипса опредѣляется интеграломъ.

$$S = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Замѣтимъ теперь, что:

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

выражаетъ собою четверть площади круга, описаннаго изъ центра эллипса радіусомъ a, ибо уравненіе соотвѣтствующей окружности есть:

$$y^2 + x^2 = a^2.$$

Слѣдовательно:

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi a^2}{4}$$

и потому:

$$S = \frac{b}{a}\cdot\frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi a b}{4};$$

а площадь эллипса: $4S = \pi a b$.

Конечно, возможно и прямое вычисленіе интеграла, но оно довольно сложно*).

---

*) Слѣдуетъ примѣнить интегрированіе по частямъ или положить $x = \mathrm{Cost}$.

Вычисленіе объемовъ.

Производная объема тѣла вращенія.

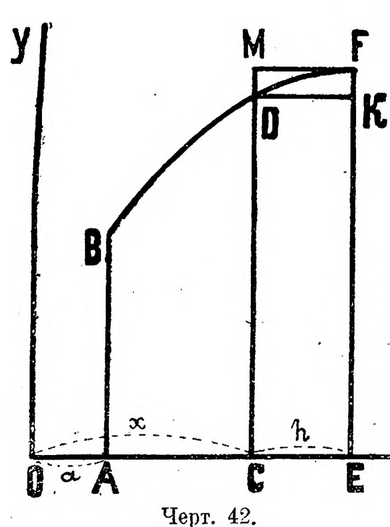
130. Представимъ себѣ, что часть плоскости ABDC вращается около оси абсциссъ и производитъ нѣкоторое тѣло вращенія. Пусть:

$$OA = a$$
$$OC = x$$

и допустимъ, что данная кривая BD выражается уравненіемъ:

$$y = f(x).$$

Такъ какъ съ измѣненіемъ x объемъ разсматриваемаго тѣла вращенія будетъ измѣняться, то онъ представляетъ собою нѣкоторую функцію отъ x, которую мы обозначимъ $\varphi(x)$.



Черт. 42.

Найдемъ производную этой функціи и съ этой цѣлью дадимъ x приращеніе h. Тогда приращеніе объема:

$$\varphi(x+h) - \varphi(x)$$

выразится объемомъ тѣла, происходящаго отъ вращенія фигуры CDFE, и этотъ объемъ (см. черт. 42) больше объема цилиндра, происходящаго отъ вращенія прямоугольника CDKE и меньше объема цилиндра, происходящаго отъ вращенія прямоугольника CMFE*), т.-е.:

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) > \pi\left[f(x)\right]^2 . h;$$

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) < \pi\left[f(x+h)\right]^2 . h;$$

или:

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} > \pi\left[f(x)\right]^2;$$

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} < \pi\left[f(x+h)\right]^2;$$

и потому:

$$\varphi'(x) = \text{пр.}\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}_{h\to 0} = \pi\left[f(x)\right]^2 = \pi y^2.$$

Объемы тѣлъ вращенія.

131. Такъ какъ производная объема V тѣла вращенія вокругъ оси абсциссъ выражается формулой:

$$V' = \pi y^2,$$

*) Ординаты дуги DF предполагаются или постоянно возрастающими или постоянно убывающими. (См. стр. 88).

то самый объемъ опредѣлится, какъ опредѣленный интегралъ отъ $\pi y^2 dx$, взятый въ предѣлахъ отъ a до x, гдѣ a есть абсцисса соотвѣтствующая начальной ординатѣ AB (черт. 42), т.-е.:

$$V = \int_a^x \pi y^2 dx.$$

Примѣнимъ эту общую формулу къ нѣкоторымъ частнымъ случаямъ.

Объемъ шара.

132. Обозначимъ черезъ V объемъ полушара, получающагося отъ вращенія четверти круга OAB вокругъ оси абсциссъ. Изъ уравненія окружности имѣемъ:

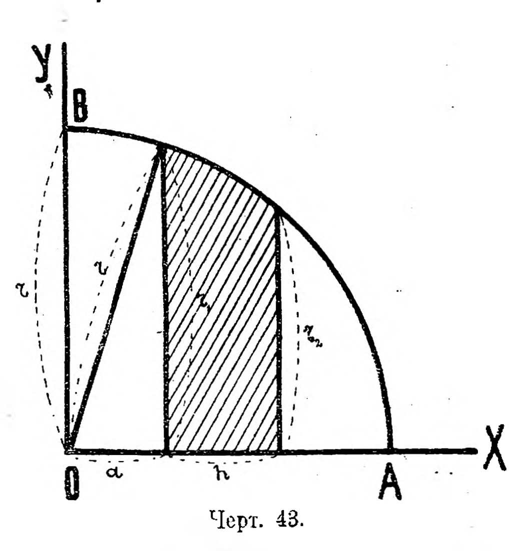
$$y^2 = r^2 - x^2.$$

Поэтому:

$$V = \int_0^r \pi (r^2 - x^2)\, dx = \frac{2}{3}\pi r^3,$$

а объемъ шара:

$$2V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$



Черт. 43.

Объемъ шарового сегмента о двухъ основаніяхъ и объ одномъ основаніи.

133. Шаровой сегментъ о двухъ основаніяхъ получается отъ вращенія заштрихованной площадки (черт. 43). Поэтому объемъ его W, при тѣхъ обозначеніяхъ, которыя сдѣланы на чертежѣ, выразится формулою:

$$W = \int_a^{a+h} \pi (r^2 - x^2)\, dx = \frac{\pi h}{3}[3r^2 - (3a^2 + 3ah + h^2)].$$

Но:

$$r_1^2 = r^2 - a^2$$
$$r_2^2 = r^2 - (a+h)^2.$$

Поэтому:

$$W = h\frac{\pi r_1^2 + \pi r_2^2}{2} + \frac{\pi h^3}{6}.$$

Для опредѣленія объема W_1 шарового сегмента объ одномъ основаніи положимъ въ послѣдней формулѣ $r_2 = 0$ и будемъ имѣть въ виду, что:

$$r^2 = r_1^2 + (r-h)^2,$$

Тогда, послѣ небольшихъ преобразованій, получимъ:

$$W_1 = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right).$$

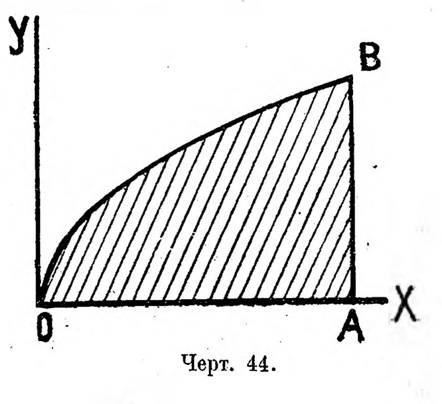
Объемъ параболоида вращенія.

134. Отъ вращенія фигуры OAB (черт. 44), ограниченной дугой OB параболы, вокругъ оси абсциссъ получается параболоидъ вращенія. Такъ какъ парабола выражается уравненіемъ:

$$y^2 = 2px.$$

то объемъ V параболоида вращенія опредѣлится формулой:

$$V = \int_0^x \pi 2px dx = \pi px^2 = \frac{1}{2}\pi y^2 x.$$



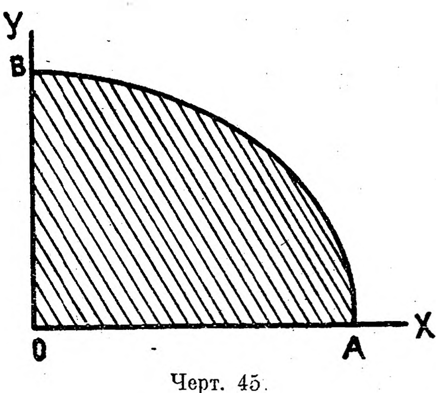
Черт. 44.

Объемъ эллипсоида вращенія.

135. Четверть эллипса OAB, вращаясь (черт. 45) около большой оси эллипса, произведетъ половину эллипсоида вращенія. Такъ какъ уравненіе эллипса имѣетъ видъ:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$ (для дуги AB удержанъ знак. +), то объемъ V эллипсоида вращенія опредѣлится формулой:

$$\frac{V}{2} = \int_0^a \pi \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx = \frac{2}{3}\pi a b^2.$$



Черт. 45.

Поэтому:
$$V = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

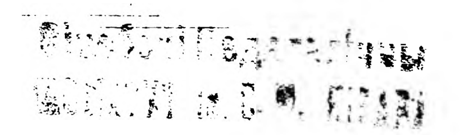
Замѣняя здѣсь a на b и b на a, получимъ объемъ V' эллипсоида, происходящаго отъ вращенія эллипса около его малой оси:

$$V' = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

Если:
$$a = b = r,$$
то получимъ объемъ V_1 шара:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

ОГЛАВЛЕНІЕ.



ИЗДАНІЯ

Т-ва „В. В. Думновъ, насл. бр. Салаевыхъ“

Москва, Б. Лубянка, 15/17.

Петроградъ. Большая Конюшенная, д. № 1.

М. Попруженко.

1) Матеріалы по методикѣ анализа безконечно-малыхъ въ средней школѣ.
2) О разложеніи многочленовъ на множителей.
3) О длинѣ.
4) О безконечности.
5) Объ отношеніи окружности къ діаметру.
6) Одно изъ метрическихъ свойствъ треугольника.
7) О биномѣ Ньютона.
8) Нѣсколько словъ по поводу открываемыхъ въ Одессѣ физико-математическихъ курсовъ.
9) Значеніе учебника при обученіи математики.
10) По поводу одного учебника ариѳметики.
11) Изъ записной книжки преподавателя математики.
12) Оскудѣніе.
13) Rapports présentés à la délegation russe.
14) Первый Всероссійскій съѣздъ преподавателей математики.
15) Дифференціалъ и интегралъ.
16) Второй Всероссійскій съѣздъ преподавателей математики.
17) Темы по математикѣ.
18) Хорошія усилія.

Тип. Т-ва Рябушинскихъ. Москва.